



Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Civil
2009

**VITOR EMANUEL
MARTA DA SILVA**

**DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS
NUMÉRICAS PARA A ANÁLISE DINÂMICA NÃO
LINEAR DE ESTRUTURAS**



Universidade de Aveiro Departamento de Engenharia Civil
2009

**VITOR EMANUEL
MARTA DA SILVA**

DESENVOLVIMENTO DE FERRAMENTAS NUMÉRICAS PARA A ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil, realizada sob a orientação científica do Doutor Humberto Salazar Amorim Varum, Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro e co-orientação do Professor Doutor Rui Pinho, Professor Auxiliar do Università degli studi di Pavia, Italia.

O júri

presidente

Prof. Doutor Aníbal Guimarães da Costa
professor Catedrático, Universidade de Aveiro

vogais

Prof. Doutor João Paulo Sousa Costa de Miranda Guedes
professor Auxiliar, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Prof. Doutor Humberto Salazar Amorim Varum
professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Rui Pinho
professor auxiliar da Università degli studi di Pavia

agradecimentos

Começo por expressar o meu profundo agradecimento ao Professor Doutor Humberto Varum (Orientador) não só pelo incentivo e orientação durante este último ano, mas também pelo apoio durante todo o meu percurso académico. As sábias sugestões e as longas conversas foram fundamentais na concretização deste trabalho e marcantes na minha formação como pessoa.

O meu sincero agradecimento ao Professor Doutor Rui Pinho da Università degli Studi di Pavia pelos constantes esclarecimentos e acima de tudo, pela inspiração e motivação transmitida.

À Professora Roberta Massabó e ao Professor Sergio Lagomarsino da Università degli Studi di Genova por me terem acolhido neste último período de trabalho e pela forma como sempre se mostraram disponíveis para prestar qualquer apoio.

A todos os professores do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Aveiro, que de alguma forma contribuíram para o esclarecimento e discussão de trabalhos.

Aos meus pais e irmã pelo apoio incondicional, mesmo nos momentos de maior dificuldade em que a distância não perdoa. Por todos os conselhos e incentivos que em muito me ajudaram para a minha educação e formação e a fazer com que todo este esforço valesse a pena.

A todos Obrigado.

palavras-chave

Estruturas de casca, analogia de grelha, análise não linear, modelo de fibras.

Resumo

Na presente dissertação foi desenvolvido um estudo sobre a análise dos elementos de casca através da criação de um modelo numérico baseado no método da analogia de grelha, com recurso a modelos de fibras para a implementação da não linearidade material.

Foi efectuada uma apresentação das diversas formas como os elementos laminares surgem actualmente nas construções e quais as suas principais características. A evolução dos métodos e modelos de análise aplicados a estes elementos estruturais foi estudada, dando-se particular ênfase ao método da analogia de grelha.

É demonstrado como o código que transforma elementos laminares em malhas de vigas é executado e foi apresentado o modo como as características geométricas das barras são determinadas e quais os modelos dos materiais que são usados.

Foram estudados os aspectos e parâmetros de modelação que mais influenciam o comportamento deste tipo de estruturas, tais como o grau de refinamento da malha e as propriedades mecânicas dos materiais constituintes. Para tal, foram realizadas análises paramétricas da influência do grau de refinamento e da não linearidade na resposta de painéis isolados de laje, e análises comparativas com outras formulações.

Modelaram-se numericamente ensaios experimentais sobre painéis de laje carregados monotonicamente até à rotura, confrontando-se os valores obtidos numericamente, com os resultados experimentais. Foi realizada uma comparação entre os resultados numéricos obtidos com a formulação aqui desenvolvida, e com resultados obtidos com outras formulações.

Foi estudada a resposta de uma parede resistente de betão armado sujeita a cargas cíclicas horizontais de amplitude crescente, tendo como principal objectivo verificar a capacidade do modelo em representar a evolução do dano.

Por último, o desempenho computacional do modelo aqui proposto foi avaliado, tendo-se estudado algumas medidas que permitem o melhoramento da sua eficácia.

keywords

Shell structures, grillage analogy, non linear analysis, fiber model.

abstract

The present dissertation aimed the study of the shell elements through the creation of a numerical model, which uses the well known grillage analogy, taking into account fibre models for the implementation of the non linearity of the materials.

A presentation of the different ways that this kind of elements can appear in the constructions was done, and its principal characteristics were referred. The methods that have been used to analyze these structural elements along the years were studied, giving particular emphasis to the grillage analogy method.

A demonstration of how the code transforms the continuous surface of laminar elements into a mesh of beams was done. Within this section was also presented how the geometrical characteristics are computed and which constitutive laws were used to simulate the materials behaviour.

Several numerical analyses to slabs were done in order to study the influence of some parameters and aspects like the mesh refinement or the mechanical properties in the distribution of the efforts and deformations given by the numerical model.

Using an experimental test where two slabs were monotonic loaded until rupture, a comparison in done between the displacements and resistant capacity obtained numerically and experimentally. It was also done a brief comparison between the values obtained with this simplified model and the results using finite shell elements and finite tridimensional elements done by other authors for the same experimental test.

The behaviour of a shear wall subjected to a cyclic loading was studied in order to analyze the capacity of the model in representing the evolution of the damage in the structure.

At last, an evaluation of the computational performance of this type of numerical model was done and some suggestions to improve the effectiveness of non linear analysis were presented.

parole chiave

Strutture guscio, elementi della griglia, modelli di fibre, analisi non lineare

sommario

Questa tesi ha lo scopo di studiare gli elementi guscio attraverso la creazione di un modello numerico, che utilizza la ben nota “grillage analogy”, prendendo in considerazione modelli di fibre per l'implementazione della non linearità dei materiali.

Durante lo studio è stata effettuata una presentazione dei diversi modi in cui questi elementi possono presentarsi nelle strutture e ne sono state presentate le principali caratteristiche. Inoltre sono stati studiati i metodi utilizzati nel corso degli anni per analizzare questi elementi strutturali, dando particolare enfasi al método degli elementi della griglia. È stata eseguita una dimostrazione di come il codice trasformi la superficie continua di elementi laminari in una mesh di elementi trave. In questa sezione è stata inoltre illustrato come vengono definite le caratteristiche geometriche e quali leggi costitutive vengono utilizzate per simulare il comportamento dei materiali.

Sono state effettuate diverse analisi numeriche su piastre al fine di studiare l'influenza di alcuni parametri e aspetti come l'infittimento della mesh o le proprietà meccaniche nella distribuzione degli sforzi e le deformazioni fornite dal metodo numerico.

Utilizzando una prova sperimentale dove due piastre sono state caricate fino a rottura, sono stati confrontati i dati relativi alle deformazioni e alla resistenza ottenuti numericamente con quelli ottenuti sperimentalmente. È stato quindi effettuato un breve confronto tra i valori ricavati attraverso questo modello semplificato e i risultati ottenuti utilizzando gli elementi finiti guscio e gli elementi finiti tridimensionali di cui altri autori si sono serviti per la stessa prova sperimentale.

È stato studiato il comportamento di una parete di taglio soggetta ad un carico ciclico, al fine di analizzare la capacità di un modello di rappresentare l'evoluzione dei danni in una struttura.

Infine, è stata effettuata una valutazione delle capacità computazionali di questo tipo di modello numerico e sono stati inseriti alcuni suggerimenti per migliorare l'efficacia dell'analisi non lineare.

ÍNDICE GERAL**Agradecimentos****Resumo****Abstract****Sommario**

Índice geral	xiii
Índice de figuras	xvii
Índice de tabelas	xxi
Lista de símbolos	xxiii

Capítulo 1. Introdução	1
1.1. Problema proposto	3
1.2. Objectivos	5
1.3. Organização da dissertação	6
Capítulo 2. Considerações sobre elementos de casca	9
2.1. Lajes	9
2.1.1. Classificação de lajes quanto ao sistema de apoio	10
2.1.2. Classificação de lajes quanto à concepção estrutural	10
2.1.3. Comportamento de uma laje de betão armado	13
2.2. Paredes de retenção e resistentes	14
2.3. Geometria	16
2.4. Métodos de análise analítica linear de placas	16
2.4.1. Teoria clássica ou de Kirchhoff	21
2.4.2. Teoria de Mindlin	22
2.5. Solução de Navier (1823)	22
2.6. Analogia de grelha	24
2.6.1. Descrição do método	24

2.6.2.	Deslocamentos e esforços na analogia de grelha	25
2.6.3.	Influência do coeficiente de Poisson	27
2.6.3.1.	Variações nos deslocamentos:	27
2.6.3.2.	Variações nos esforços	29
2.7.	Método dos elementos finitos na análise estrutural	30
2.7.1.	Modelo de fibras	31
2.7.2.	Importância das análises não lineares	32
 Capítulo 3. Modelações numéricas		35
3.1.	OpenSees	35
3.1.1.	Construção do código	35
3.1.1.1.	Unidades	35
3.1.1.2.	Modelos dos materiais	36
3.1.1.2.1.	Análise linear	36
3.1.1.2.2.	Análise não linear	36
3.1.1.3.	Secções	39
3.1.1.3.1.	Dimensões	39
3.1.1.3.2.	Secções para análises lineares	40
3.1.1.3.3.	Secções para análises não lineares	41
3.1.1.4.	Nós	42
3.1.1.5.	Elementos	43
3.1.1.6.	Carregamentos	44
3.1.1.7.	Massas	45
3.1.1.8.	<i>Output</i>	45
3.1.1.9.	Algoritmo	46
3.1.2.	Refinamento da malha	46
3.1.2.1.	Análises lineares	46
3.1.2.2.	Análises não lineares	47
3.2.	SAP2000	48
3.2.1.	Unidades e dimensões	48
3.2.2.	Materiais	49
3.2.3.	Secções	49
3.2.4.	Carregamentos	51

Capítulo 4. Estudo do efeito do refinamento e da rigidez à torção	53
4.1. Influência do refinamento	53
4.1.1. Análises lineares	53
4.1.2. Análises não lineares	57
4.2. Influência da rigidez à torção	59
4.2.1. Deslocamentos transversais	59
4.2.2. Momentos flectores	61
4.3. Comentários finais	62
 Capítulo 5. Comparação com resultados de outras formulações	 65
5.1. Análise estática linear	65
5.2. Análise estática não-linear	68
5.3. Comentários finais	70
 Capítulo 6. Comparação com resultados experimentais	 71
6.1. Descrição do ensaio	71
6.2. Propriedades dos materiais	72
6.3. Apresentação dos resultados	73
6.3.1. Laje 1 (espessura 10 cm)	74
6.3.2. Laje 2 (espessura 15 cm)	76
6.4. Comentários finais	78
 Capítulo 7. Análise cíclica não linear	 81
7.1. Simulação dos apoios elásticos	82
7.2. Cálculo dos esforços	85
7.3. Estudo numérico 1 – Carregamento monotónico	87
7.4. Ensaio numérico 2 – Carregamento cíclico	89
7.5. Comentários finais	93
 Capítulo 8. Performance computacional	 95
8.1. Influência do refinamento	95
8.2. Influência da dimensão da estrutura	97
8.3. Melhoramento da performance computacional	98
8.3.1. Por aplicação do carregamento de forma variável	98

8.3.2.	Pela combinação de elementos com comportamento linear e não linear	100
8.4.	Comentários finais	103
Capítulo 9.	Conclusões e desenvolvimentos futuros	105
9.1.	Conclusões	105
9.2.	Perspectivas de trabalho futuro	108
	Referências bibliográficas	111

Anexos:

Anexo A – Código para a análise não linear de elementos de casca horizontais (lajes)

Anexo B – Código para a análise não linear de elementos de casca verticais (paredes resistentes)

Índice de figuras

Figura 1. Asphalt Green Sports – Nova Iorque, USA (www.structurae.de)	3
Figura 2. Pavilhão Rosa Mota – Porto, Portugal (www.structurae.de)	3
Figura 3. Auditório de Tenerife – Tenerife, Espanha (www.structurae.de)	3
Figura 4. Casa da Ópera – Sydney, Austrália (www.structurae.de)	3
Figura 5. Aeroporto Charles de Gaulle – Paris, França (www.structurae.de)	4
Figura 6. Aeroporto Internacional do Dubai – Dubai, UAE (www.structurae.de)	4
Figura 7. Colapso do Terminal 2E. (www.volle.com/opinion/roissy.htm)	4
Figura 8. Estruturas compostas por elementos estruturais com geometria de casca.	9
Figura 9. Sistemas de apoios de lajes: a) laje apoiada em vigas, b) laje apoiada em pilares (Cachim, 2005)	10
Figura 10. Lajes maciças (Cachim 2005)	11
Figura 11. Lajes aligeiradas (Cachim, 2005)	11
Figura 12. Lajes alveoladas (Cachim, 2005)	12
Figura 13. Lajes pré-esforçadas (pós-tensão) (Cachim, 2005)	12
Figura 14. Lajes com vigotas pré-esforçadas (Cachim, 2005)	12
Figura 15. Fases do comportamento de uma laje de betão armado (Cachim, 2005)	13
Figura 16. Parede de retenção (esquerda) e reservatório de água (direita)	15
Figura 17. Representação esquemática dos esforços de membrana (esquerda) e de flexão e corte (direita) num elemento de casca (Soriano, 2003).	16
Figura 18. Esforços de corte por unidade de comprimento num elemento de laje (adaptado de Clarke e Cope, 1984)	17
Figura 19. Momentos flectores por unidade de comprimento num elemento de laje (adaptado de Clarke e Cope, 1984)	17
Figura 20. Variação linear das tensões normais e de corte ao longo da espessura de um elemento de laje (adaptado de Cachim, 2005)	19
Figura 21. Comportamento de um elemento laminar de acordo com a teoria clássica ou de Kirchhoff (Soriano, 2003)	21
Figura 22. Comportamento de um elemento laminar de acordo com a teoria de Mindlin (Soriano, 2003)	22

Figura 23. Representação esquemática da laje rectangular simplesmente apoiada nos bordos (adaptado de Timoshenko, 1959)	23
Figura 24. Campo de deslocamentos nas lajes e nas grelhas (adaptado de Castro, 2000).	25
Figura 25. Distribuição dos momentos flectores (adaptado de Clarke e Cope, 1984)	25
Figura 26. Distribuição dos esforços cortantes. (adaptado de Clarke e Cope, 1984)	26
Figura 27. Distribuição dos momentos de torção (adaptado de Clarke e Cope, 1984)	26
Figura 28. Variação da rigidez à flexão com o módulo de Poisson	28
Figura 29. Deformação por flexão segundo x de uma malha de vigas (adaptado de Castro e Leitão, 2005).	29
Figura 30. Deformação da secção transversal de uma placa composta por vigas (adaptado de Castro e Leitão, 2005).	29
Figura 31. Representação dos parâmetros envolvidos na construção do diagrama tensão – deformação.	37
Figura 32. Curva de comportamento do material sujeito a ciclos de carga.	37
Figura 33. Representação dos parâmetros envolvidos na construção do diagrama tensão – deformação.	38
Figura 34. Curva de comportamento do material sujeito a ciclos de carga.	38
Figura 35. Representação da divisão de uma laje numa malha de vigas	39
Figura 36. Secção da viga elástica	40
Figura 37. Representação de uma viga segundo o modelo de fibras.	42
Figura 38. Representação da grelha de nós no OpenSees.	43
Figura 39. Representação dos elementos de grelha no OpenSees.	43
Figura 40. Representação de um elemento de casca ligado a pilares no OpenSees.	44
Figura 41. Área de influência em função da posição do nó.	45
Figura 42. Modelação de uma laje fungiforme usando-se o <i>software</i> SAP2000.	48
Figura 43. Quadro de inserção das propriedades materiais.	49
Figura 44. Quadro de caracterização da secção do elemento.	50
Figura 45. Quadro de caracterização do carregamento.	51
Figura 46. Deformada de um elemento de casca após análise.	51
Figura 47. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.	54
Figura 48. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.	54
Figura 49. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.	54

Figura 50. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.	55
Figura 51. Espaçamento da malha de vigas em função das dimensões em planta da laje	55
Figura 52. Espaçamento da malha de elementos de casca em função das dimensões em planta da laje	56
Figura 53. Carga de rotura da laje 5 em função da discretização.	57
Figura 54. Deslocamentos transversais do nó central da laje 5.	58
Figura 55. Características da laje modelada no OpenSees.	59
Figura 56. Deslocamentos transversais ao longo da linha AB	60
Figura 57. Deslocamentos transversais ao longo da linha CD.	60
Figura 58. Momentos flectores segundo x ao longo da linha AB	61
Figura 59. Momentos flectores segundo y ao longo da linha AB.	62
Figura 60. Laje 1: fimensões e orientação dos eixos de referência	65
Figura 61. Deslocamentos transversais ao longo do vão médio da laje 1.	66
Figura 62. Momentos flectores na direcção x ao longo do vão médio (linha AB) da laje 1.	66
Figura 63. Esforços transversos ao longo da linha CD da laje 1.	67
Figura 64. Deslocamentos transversais do ponto central da laje 2.	68
Figura 65. Momentos flectores em função da curvatura numa barra na laje 2.	69
Figura 66. Representação esquemática do ensaio das lajes (adaptado de Bandeira, 2006).	71
Figura 67. Disposição das armaduras das lajes ensaiadas (adaptado de Bandeira, 2006).	72
Figura 68. Resultados experimentais: a) laje 1; b) laje 2	73
Figura 69. Comparação entre os resultados experimentais e numéricos da laje 1.	74
Figura 70. Diagrama tensão/deformação de uma fibra de betão da laje 1.	75
Figura 71. Diagrama tensão/deformação para um varão de aço da laje 1	76
Figura 72. Comparação entre os resultados experimentais e numéricos da laje 2.	77
Figura 73. Diagrama tensão/deformação de uma fibra de betão da laje 2.	77
Figura 74. Diagrama tensão/deformação para um varão de aço da laje 2	78
Figura 75. Edifício de três andares com paredes resistentes	81
Figura 76. Parede resistente modelada através da malha de vigas.	83
Figura 77. Equivalência estrutural do conjunto parede resistente mais barra elástica.	84
Figura 78. Deformada do edifício quando solicitado horizontalmente.	85
Figura 79. Disposição da armadura na parede resistente: a) na face interior; b) na face exterior	86
Figura 80. Carga por nó em função do deslocamento imposto no topo da parede resistente.	87
Figura 81. Diagrama tensão/deformação: a) fibra de aço b) fibra de betão	88

Figura 82. Relação momento flector/curvatura num elemento da base da parede resistente.	88
Figura 83. Representação de um ciclo completo de deslocamentos impostos.	89
Figura 84. Carga por nó em função do deslocamento imposto no topo da parede resistente.	90
Figura 85. Diagrama momento flector/curvatura num elemento da base.	91
Figura 86. Diagrama momento flector/curvatura na 3ª etapa do ensaio.	92
Figura 87. Diagrama tensão/deformação de uma fibra de betão considerando apenas a fase de compressão	92
Figura 88. Diagrama tensão/deformação de uma fibra do aço.	93
Figura 89. Estrutura 1 composta por uma laje fungiforme suportada por seis pilares.	96
Figura 90. Tempo de resolução do código em função do espaçamento da malha	97
Figura 91. Relação entre carregamento e flecha máxima da estrutura 1.	99
Figura 92. Laje apoiada em duas vigas nos bordos apostos.	101
Figura 93. Deslocamentos em função do carregamento da laje apoiada nos bordos.	101
Figura 94. Diagrama tensão/deformação: a) elemento segundo x ; b) elemento segundo y	102

Índice de tabelas

Tabela 1.	Diferenças entre as abordagens analíticas lineares para elementos de casca	50
Tabela 2.	Caracterização das lajes modeladas para análise linear	53
Tabela 3.	Caracterização da laje 5 modelada para análise não linear	57
Tabela 4.	Características mecânicas, geométricas e carregamento da laje 1	65
Tabela 5.	Características geométricas, mecânicas e distribuição da armadura da laje 2	68
Tabela 6.	Propriedades dos materiais das lajes 1 e 2.	72
Tabela 7.	Características geométricas dos elementos estruturais.	82
Tabela 8.	Forças e momentos actuantes no topo da parede resistente.	86
Tabela 9.	Propriedades materiais da parede resistente.	86
Tabela 10.	Sequência de deslocamentos máximos impostos no estudo numérico 2.	90
Tabela 11.	Propriedades mecânicas dos materiais da estrutura 1.	96
Tabela 12.	Características geométricas e quantidade de armadura da estrutura 1.	96
Tabela 13.	Tempo de cálculo (em min) para Aas várias configurações de estruturas	98
Tabela 14.	Variação dos esforços e deslocamentos com a alteração de elementos.	103
Tabela 15.	Comparação entre resultados experimentais e numéricos.	107

Lista de símbolos

A_c, A_b, A_i	Area tributária dos nós de canto, de bordo e interiores respectivamente
A_l	Quantidade de armadura em pilares
A_{sx}, A_{sy}	Quantidade de armadura em elementos de placa
b_x, b_y	Largura de elementos de barra
d	Vector deslocamento
D	Rigidez de flexão de placas
E	Módulo de elasticidade longitudinal da laje
E_c	Módulo de elasticidade longitudinal do betão
E_s	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
f	Vector solicitação
f_c	Resistência característica do betão à compressão
f_{ct}	Resistência característica do betão à tracção
f_s	Tensão de cedência do aço
f_u	Tensão de rotura do aço
G	Módulo de distorção da laje
h	Espessura do elemento de placa
I, I_x, I_y	Inércia à flexão de elementos de barra
J	Inércia de torção de elementos de barra
K	Matriz rigidez
l_x, l_y	Largura dos elementos de placa
M_x, M_y	Momento flector em elementos de placa
M_{xy}	Momento torsor em elementos de placa
P_p	Carga distribuída correspondente ao peso próprio da laje
q	Carregamento uniformemente distribuído
Q_x, Q_y	Esforço transversal em elementos de placa
S_q	Carga distribuída correspondente à sobrecarga de serviço
w	Deslocamento transversal
$\Delta l_x, \Delta l_y$	Espaçamento entre os elementos de barra
ν	Coefficiente de Poisson
θ_x, θ_y	Rotação em torno do eixo x e y respectivamente

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente, as estruturas de betão armado possuíam essencialmente uma tipologia reticulada. Em estruturas desta categoria, os elementos principais são as vigas e os pilares que formam entre si um conjunto de pórticos que suportam as solicitações transmitidas pelas lajes. A escolha deste tipo de construção revelava-se essencial devido ao facto das técnicas construtivas e ferramentas informáticas estarem completamente direccionadas para este tipo de estruturas. A existência de elementos laminares como lajes, paredes resistentes ou caixas de escadas era muitas vezes ignorada na análise estrutural, sendo apenas contabilizada a sua massa e nunca a sua contribuição para a rigidez da estrutura.

O aparecimento de novas condicionantes na concepção estrutural dos edifícios tais como a economia, a utilização prevista, a localização da construção ou as exigências arquitectónicas, impulsionaram o desenvolvimento de novas ferramentas informáticas que permitissem o cálculo eficiente e seguro de estruturas cujos elementos principais não fossem apenas elementos de barra. Surgem assim novas tipologias de edifícios denominadas por mistas (pórticos e paredes) e laminares (paredes e lajes). Neste tipo construções, recorre-se frequentemente a paredes resistentes e lajes com grandes vãos que podem apoiar directamente em pilares (lajes fungiformes) (GESTEC, 2005). A estes elementos caracterizados por uma pequena espessura quando comparada com as suas dimensões em superfície, dá-se o nome de elemento de casca, e trata-se do objecto de estudo desta dissertação.

O facto de estes elementos possuírem uma esbelteza bastante baixa, torna-os muito deformáveis, aumentando assim a necessidade de se conhecer com rigor o estado de deformação da estrutura. Nestas condições, é provável que o factor determinante no dimensionamento seja os estados limites de serviço (flechas máximas) e não propriamente os estados limites últimos (carga de colapso). A simples aplicação das cargas de serviço em estruturas deste tipo, pode implicar a deformação dos elementos em regime não-linear, já que os esforços que provocam a fendilhação do betão são em geral relativamente baixos. Sendo assim, faz todo o sentido que mesmo para as verificações de estruturas em serviço, deva-se tentar usar modelos que tenham em consideração o comportamento não linear dos materiais (Carvalho, 1994).

Actualmente, os modelos numéricos para o estudo do comportamento de elementos de barra encontram-se bastante desenvolvidos e fornecem resultados com grande rigor, quer em análises lineares, como não lineares. *Softwares* como o Castem, o OpenSees, o Diana ou o SAP2000 apresentam fortes potencialidades para o estudo de elementos de barra, na medida

em que permitem a introdução de secções de betão armado nos elementos, e seguidamente, usando modelos de fibras, calculam o comportamento da estrutura sob uma dada solicitação tendo em conta as diferentes leis constitutivas dos materiais que a compõem. Por outro lado, quando pretendemos estudar estruturas compostas essencialmente por elementos de casca, as opções reduzem-se. A análise deste tipo de elementos na maioria dos casos é forçosamente linear. Neste tipo de análise, é necessário fazer uma série de suposições e aproximações no que diz respeito às propriedades dos materiais, não permitindo tirar o máximo proveito dos mesmos. Consequentemente, o dimensionamento será mais conservativo e menos económico.

Nas últimas décadas têm sido feitos imensos estudos sobre o comportamento de paredes resistentes, lajes e núcleos de escadas, tendo dado origem a modelos numéricos mais eficazes e a leis constitutivas mais realistas. No entanto, apesar dos avanços até agora alcançados, a performance das modelações numéricas para elementos de casca mostra-se consideravelmente mais fraca do que as usadas para a análise de elementos de barra.

O uso dos conhecimentos já desenvolvidos para os elementos de barra, para a análise de elementos de casca não é novidade. Há mais de meio século, o investigador Arne Hillerborg (1956) apresenta o método das faixas. De acordo com Coelho e Loriggio (2002), neste método a laje pode ser analisada como se fosse composta por vigas dispostas em duas direcções ortogonais entre si, que são carregadas tendo em conta as condições fronteira da laje, e a localização das faixas na mesma. Outro método usado para a análise de lajes usando elementos de barra, é a chamada analogia de grelha. Segundo Bandeira (2006), neste processo é criada uma malha de vigas individuais em duas direcções, ligadas por nós nos pontos em que se intersectam. Este tipo de aproximação para o estudo de lajes tem ainda a vantagem de permitir a introdução de características distintas para cada direcção, como por exemplo, a quantidade de armadura ou as propriedades geométricas. O uso de elementos de viga para a modelação do comportamento de elementos de casca pode representar uma forte ferramenta, que com a devida calibração, poderá permitir alcançar resultados bastante satisfatórios tanto para análises lineares como para análises não lineares.

1.1. Problema proposto

Por todo o mundo existem imensas construções que se baseiam em agrupamentos de elementos de casca, de forma a criarem estruturas arquitectonicamente impressionantes. A falta de ferramentas que representem com rigor o comportamento deste tipo de estruturas, obriga a dimensionamentos exageradamente conservativos e desapropriados. Este uso excessivo de aço e betão, como é de esperar, aumenta o custo dos edifícios drasticamente. A título de exemplo, observe-se o custo do Auditório de Tenerife que ficou em 27.040.000 € (Janberg, 2003).



Figura 1. Asphalt Green Sports – Nova Iorque, USA
(www.structurae.de)



Figura 2. Pavilhão Rosa Mota – Porto, Portugal
(www.structurae.de)



Figura 3. Auditório de Tenerife – Tenerife, Espanha
(www.structurae.de)



Figura 4. Casa da Ópera – Sydney, Austrália
(www.structurae.de)

O uso incorrecto de ferramentas informáticas na análise estrutural de elementos de casca ou a falta de eficácia dos mesmos, já tem trazido grandes perdas humanas e económicas ao longo do tempo. Observe-se o colapso da cobertura do Terminal 2E do Aeroporto Internacional de Charles de Gaulle a 23 de Maio de 2004 que provocou 4 mortes, dezenas de feridos e um custo de reparação de cerca de 100 milhões de euros. Um episódio semelhante

ocorreu durante a construção do Aeroporto Internacional do Dubai, a 28 de Setembro do mesmo ano. Neste incidente morreram 5 trabalhadores e dezenas ficaram feridos.



Figura 5. Aeroporto Charles de Gaulle – Paris, França (www.structurae.de)

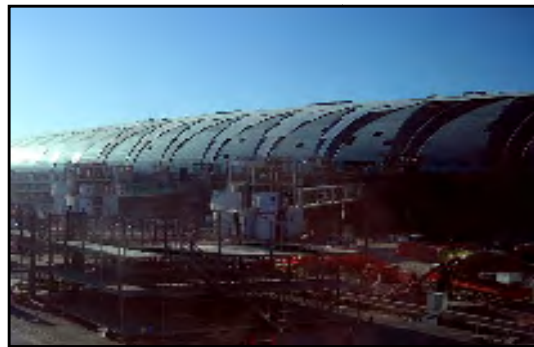


Figura 6. Aeroporto Internacional do Dubai – Dubai, UAE (www.structurae.de)



Figura 7. Colapso do Terminal 2E. (www.volle.com/opinion/roissy.htm)

A maioria dos *softwares* de análise estrutural dos dias de hoje ainda não contêm a opção de análise não linear de elementos de casca, e dos que já disponibilizam esta alternativa, não esclarecem determinados parâmetros como por exemplo quais as leis constitutivas dos materiais que estão a ser usadas ou que mecanismos de ruptura estão a ser considerados. É ainda importante referir que os modelos numéricos existentes usando elementos de casca não permitem a modelação de superfícies ortotrópicas, excluindo assim a análise de lajes nervuradas.

Por último, é importante entender que para uma modelação numérica seja considerada como satisfatória, não basta que os resultados apresentados sejam próximos da realidade, é também relevante que o esforço computacional não seja excessivo. Actualmente, os modelos numéricos disponíveis para a análise não linear de elementos de casca demoram bastante tempo a ser executados e exigem processadores demasiado potentes.

1.2. Objectivos

Como objectivo deste trabalho, pretendo estudar o comportamento não linear de elementos de laminas através da criação de um modelo numérico baseado na analogia de grelha, que recorre a modelos de fibras para a implementação da não linearidade material.

Pretende-se realizar inicialmente um estudo teórico em que seja abordada a forma como os elementos de casca podem surgir nas construções dos dias de hoje e quais as técnicas que têm sido usadas na análise do seu comportamento, dando especial importância ao método da analogia de grelha.

Para tal será usado o *software* OpenSees, através do qual pretendo criar um código que me transforme qualquer elemento de casca, numa malha de vigas, que representem com fidelidade qualquer elemento estrutural laminar, e que me permita solicitá-lo tanto estaticamente como dinamicamente. Através deste código pretende-se estudar alguns aspectos importantes para a modelação deste tipo de estruturas tais como:

- As propriedades geométricas e materiais que devem ser atribuídas aos elementos de barra, para que a malha se deforme de forma semelhante aos elementos de casca;
- O grau de refinamento da malha de vigas, de forma a poder considerar os resultados como satisfatórios;
- A influência da rigidez de torção das barras na distribuição dos esforços e deformações;
- A relação entre a complexidade do código e o tempo necessário para a resolução do mesmo.

Pretende-se também comparar os resultados dados pelo modelo numérico proposto nesta dissertação, com os valores obtidos usando-se formulações que recorram a elementos finitos de casca, recorrendo-se ao *software* SAP2000.

Tendo em vista a calibração e avaliação dos resultados dados por este modelo numérico, pretende-se recorrer a um ensaio experimental realizado em 2003 em que duas lajes são carregadas monotonicamente até à sua rotura e comparar os valores numéricos e experimentais.

Por último, tenciona-se estudar a performance computacional do modelo, através da realização de análises não lineares a estruturas com diferentes complexidades e graus de refinamento, tentando compreender medidas que minimizem o esforço de processamento exigido.

1.3. Organização da dissertação

A presente dissertação encontra-se dividida em nove capítulos. O primeiro capítulo trata-se de uma introdução que começa por descrever resumidamente a importância do uso dos elementos de casca nas construções dos dias de hoje e a importância do uso de modelos numéricos que considerem o comportamento não linear dos materiais. Aborda também as opções existentes para o estudo numérico do comportamento deste tipo de elementos, e por último, refere os desafios e dificuldades relativas à análise dos elementos de casca e quais os objectivos principais desta dissertação.

O capítulo 2 é dedicado à apresentação do estado da arte. Nesta secção, são descritas as várias formas como os elementos de casca podem surgir nas construções dos dias de hoje e quais as vantagens e desvantagens de cada uma. No que diz respeito as técnicas usadas para a análise estrutural destes elementos, serão apresentados alguns métodos analíticos e numéricos que têm sido usados ao longo dos tempos. Por último, são apresentadas algumas considerações sobre o modelo de fibras usado neste modelo numérico, assim como algumas razões pelas quais é importante recorrer-se a análises não lineares no estudo do comportamento dos elementos de casca.

Tendo em conta que a presente dissertação tem uma forte componente na área da modelação numérica, o capítulo 3 destina-se à demonstração de como o código criado no OpenSees transforma elementos de casca em malhas de vigas. São explicados aspectos como a determinação das características geométricas e materiais dos elementos de barra, aplicação das cargas nos nós da malha, implementação do modelo de fibras nas secções ou o tipo de análises que são realizadas. Devido ao facto de serem feitas comparações entre os resultados usando-se o modelo de malha de vigas e os valores obtidos recorrendo-se a formulações com elementos finitos de casca no *software* SAP2000, é apresentada uma breve descrição de como alguns dos parâmetros anteriores foram introduzidos nesta aplicação.

No capítulo 4 é inicialmente apresentado um estudo quanto à influência do grau de refinamento usado nas modelações, fazendo-se vários ensaios numéricos quer em regime linear, como em regime não linear e propondo-se de seguida expressões que permitem produzir-se resultados satisfatórios. Posteriormente, é analisada a influência da rigidez de torção dos

elementos de barra na distribuição dos esforços e deformações. Para tal, os resultados numéricos são comparados com valores gerados pela solução exacta de Navier.

Os valores gerados por este modelo numérico são confrontados com os valores obtidos usando-se formulações com elementos finitos de casca em regime elástico no capítulo 5. De seguida, realiza-se uma análise não linear a uma laje fungiforme, e são construídos diagramas carregamento vs flecha máxima e momento flector vs curvatura, de forma a estudar a variação da rigidez do elemento estrutural até à sua rotura.

Havendo a necessidade de verificar-se a validade dos resultados gerados este modelo numérico, no capítulo 6 recorre-se a um ensaio experimental em que foram testados dois elementos de casca e confrontam-se os valores obtidos numericamente, com os resultados experimentais. É também feita uma breve comparação entre os valores obtidos numericamente por outros autores recorrendo-se a elementos finitos de casca e elementos finitos tridimensionais em regime não linear.

No capítulo 7, é apresentado um estudo de um elemento de casca vertical que é sujeito a ciclos de carga e descarga até à sua rotura, tendo como principal objectivo a avaliação da eficácia da introdução de danos nos elementos em ensaios cíclicos. Nesta secção é ainda explorada a opção de introdução de deslocamentos em vez de cargas na análise estrutural.

Tendo em consideração os inúmeros ensaios numéricos realizados anteriormente, no capítulo 8, desenvolve-se um estudo que avalia a performance computacional deste tipo de modelação, fazendo-se algumas sugestões para que a eficácia do modelo seja melhorada.

Finalmente, no Capítulo 9 resumem-se as principais conclusões deste trabalho, capítulo a capítulo, fornecendo ainda algumas perspectivas possíveis de trabalho futuro.

No sentido de proporcionar informação mais detalhada quanto ao código criado no OpenSees, foram criados 2 anexos que reúnem a seguinte informação:

- Anexo A – Código para a análise não linear de elementos laminares horizontais (lajes).
- Anexo B – Código para a análise não linear de elementos laminares verticais (paredes resistentes).

2. CONSIDERAÇÕES SOBRE ELEMENTOS DE CASCA

Para além dos exemplos descritos anteriormente em que os elementos de casca são usados para formar coberturas esbeltas, este tipo de elemento estrutural também está presentes em outras partes de construções tais como lajes, caixas de escadas e de elevadores, túneis, paredes de retenção e até mesmo pilares de pontes ocos. A sua eficiente capacidade de carga e efeito arquitectónico impressionante, torna o elemento de casca único e com uma forte presença por todo o mundo.



Figura 8. Estruturas compostas por elementos estruturais com geometria de casca.

Neste trabalho serão abordados sobretudo os elementos laminares cujas solicitações são maioritariamente perpendiculares à sua superfície, como por exemplo lajes ou muros de contenção.

2.1. Lajes

Segundo Cachim (2005), as lajes tratam-se de elementos caracterizados por possuírem uma espessura bastante inferior quando comparada com as suas dimensão em planta, considerando-se em geral uma relação de pelo menos $1/5$ e por nelas actuarem cargas maioritariamente perpendiculares ao seu plano médio, garantindo-lhes um funcionamento essencialmente por flexão.

De acordo com Bandeira (2006), a classificação das lajes pode ser feito de acordo com imensos parâmetros tais como, o sistema de apoio, o material que as constitui, o processo de fabrico, o modo de flexão dominante, a concepção estrutural, etc.

Para este trabalho será abordada a classificação de lajes quanto ao sistema de apoio e concepção estrutural, já que o seu conhecimento é fundamental para que seja possível a sua modelação.

2.1.1. Classificação de lajes quanto ao sistema de apoio

O sistema de apoio das lajes pode ser composto por apoios lineares, pontuais, ou uma combinação de ambos. Os apoios lineares são em geral constituídos por paredes de betão ou alvenaria ou por vigas de betão, aço ou madeira, enquanto os apoios pontuais são geralmente compostos por pilares de betão ou aço.

A escolha do tipo de sistema de apoio está muitas vezes condicionada ao tipo de uso previsto para a construção. Apoios lineares são geralmente admitidos quando não existe uma grande exigência de espaços amplos, já os apoios pontuais são necessários quando é essencial que exista uma grande flexibilidade na organização do espaço interior, como é o caso de superfícies comerciais ou escritórios (Cachim, 2005).

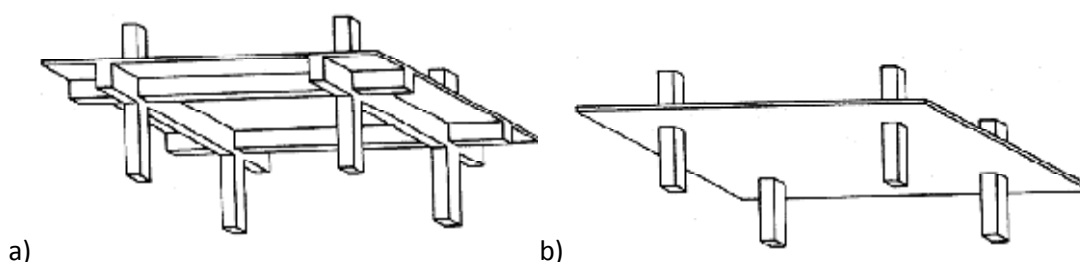


Figura 9. Sistemas de apoios de lajes: a) laje apoiada em vigas, b) laje apoiada em pilares (Cachim, 2005)

2.1.2. Classificação de lajes quanto à concepção estrutural

Em 1880, Hannebique constrói a primeira laje armada com varões de aço com secção circular em França. Desde então, a concepção estrutural das lajes tem sofrido imensas modificações. Estas alterações permitiram que estes elementos estruturais passassem a ser mais robustos e leves, vencendo assim maiores vãos e por vezes, baixando o custo da obra (Sussekind, 1979). Segue-se uma descrição dos tipos de laje mais comuns.

Lajes maciças: Este tipo de lajes são essencialmente utilizadas para vencer vãos até cerca de 5 a 7 metros quer apoiadas em vigas quer em pilares. Para vãos superiores a estes valores, pode

ser mais interessante optar por lajes aligeiradas, devido à redução do seu peso próprio, que para grandes espessuras tem grande influência no seu dimensionamento (Cachim, 2005).



Figura 10. Lajes maciças (Cachim 2005)

Lajes aligeiradas: Este tipo de modificação nas lajes tem como principal objectivo reduzir o peso da laje e o volume de betão a utilizar. Para o aligeiramento podem ser usados moldes recuperáveis, ou aplicar materiais mais leves que o betão como blocos cerâmicos ou de esferovite. É importante referir que esta alteração provoca uma redução da rigidez à flexão da laje, que normalmente é compensada com a redução do seu peso (Cachim, 2005).



Figura 11. Lajes aligeiradas (Cachim, 2005)

Lajes alveolares: Estas lajes são pré-fabricadas, e colocadas em obra posteriormente. Os vazamentos contínuos ao longo do comprimento da laje permite uma redução do seu peso, custo e podem ainda facultar a passagem de tubagens eléctricas ou mecânicas pelo seu interior. A área da secção das lajes alveoladas é inferior comparativamente aos outros tipos de lajes, pelo que é necessário ter especial cuidado com a resistência ao corte nas zonas de apoio. É possível usar-se esta solução para vão de 7 a 20 metros (Cachim, 2005).



Figura 12. Lajes alveoladas (Cachim, 2005)

Lajes pré-esforçadas (pós-tensão): O pré-esforço em lajes é usado sobretudo em lajes fungiformes. A utilização do pré-esforço permite aumentar o vão das lajes, controlar a fendilhação, reduzir as deformações e ainda melhorar o comportamento ao punçoamento sobre os pilares (Cachim, 2005).



Figura 13. Lajes pré-esforçadas (pós-tensão) (Cachim, 2005)

Lajes com vigotas pré-esforçadas: Nesta solução, constrói-se primeiro uma superfície composta por vigotas de betão pré-esforçado, onde assentam blocos cerâmicos ou de betão leve, e seguidamente, aplica-se uma camada de betão complementar com cerca de 3 a 5 cm de espessura. Este tipo de lajes pode vencer vãos de 8 a 10 metros (Cachim, 2005).



Figura 14. Lajes com vigotas pré-esforçadas (Cachim, 2005)

A modelação de lajes do tipo aligeiradas, alveoladas ou com vigotas pré-esforçadas é bastante difícil devido à sua heterogeneidade tanto material, como geométrica. Neste trabalho será avaliado o primeiro tipo de lajes, as maciças.

2.1.3. Comportamento de uma laje de betão armado

A rotura de lajes em betão armado dá-se essencialmente devido a momentos flectores excessivos, podendo também ocorrer o colapso devido ao esforço transversal ou ao punçoamento. Em lajes cuja rotura ocorre devido a momentos flectores demasiado altos, podemos distinguir dois tipos de colapso: devido ao esmagamento do betão comprimido ou devido à plastificação das armaduras. No primeiro caso, o colapso da laje ocorre sem sinais prévios de ruína e as secções são classificadas quanto ao tipo de reforço como super-armadas. No segundo caso, antes de ocorrer o colapso da laje são visíveis grandes fissuras e deformações acentuadas e as secções são classificadas como sub-armadas. Actualmente, as normas para o dimensionamento de lajes conduzem a uma quantidade de armadura que em caso de colapso, será sempre devido à falha do reforço metálico. Esta escolha permite que em caso de aparecimento de sinais de possível colapso, sejam tomadas medidas de reparação (Bandeira, 2006).

O comportamento de uma laje de betão armado quando carregada progressivamente até à sua rotura apresenta várias fases, que é importante considerar. O facto de o betão ser um material com um comportamento altamente não linear provoca danos tais como o aparecimento de fissuras, plastificação das armaduras e fluência do betão (Cachim, 2005). A Figura 15 apresenta a flecha de uma determinada laje em função da carga aplicada, partindo do pressuposto que a rotura se dá devido ao esforço transversal nem ao punçoamento.

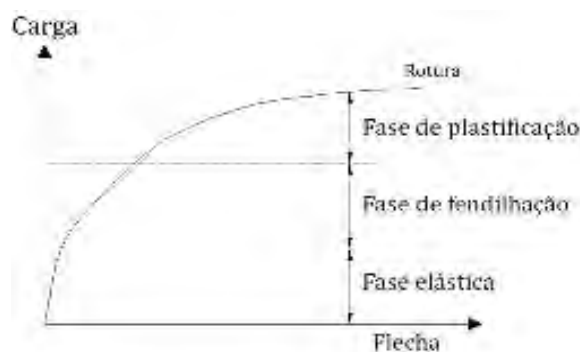


Figura 15. Fases do comportamento de uma laje de betão armado (Cachim, 2005)

A forma como a relação entre as flechas e as cargas vai variando permiti distinguir três fases distintas:

- Fase elástica: Numa fase inicial, a laje comporta-se praticamente como um corpo elástico, homogéneo e isotrópico, ou seja, pode-se aplicar a teoria elástica de placas que será abordada mais adiante. Nesta fase os deslocamentos são directamente proporcionais ao carregamento e não ocorre fissuração do betão.

- Fase de fendilhação: Com o aumento do carregamento, a resistência à tracção do betão é superada e todo o esforço de tracção passa a ser resistido pelas armaduras, provocando assim o aparecimento de fissuras na face inferior da laje. A capacidade resistente das secções fissuradas é reduzida, e aumentam os momentos flectores nas secções não-fissuradas, originando assim novas fissuras. As armaduras no entanto permanecem em regime elástico e caso não se alcance a tensão de cedência das mesmas, a abertura de fendas permanece pequena.

- Fase de plastificação: Nesta fase já não existe proporcionalidade entre os deslocamentos e o carregamento, observando-se um crescimento mais acentuado dos deslocamentos com o aumento do carregamento. Nas zonas da laje onde os momentos flectores são maiores, ocorre a plastificação das armaduras e a abertura de fendas é mais acentuada. Nestas zonas da laje as deformações desenvolvem-se praticamente sem aumento do carregamento (fase plástica) (Carvalho, 1994).

A evolução das flechas com o carregamento progressivo em análises não lineares usando-se a modelação de malha de vigas será estudada na Secção 4.1.2.

2.2. Paredes de retenção e resistentes

As paredes de retenção são bastante usadas em obras de geotecnia, onde é comum existir a necessidade de garantir a estabilidade de solos à medida que se executam escavações ou aterros. As paredes dos reservatórios de águas ou de enormes silos para cereais são outros exemplos onde as paredes de retenção são aplicadas.

Embora possuam funções completamente distintas das lajes, o comportamento estrutural destes elementos não é assim tão diferente. Ambos se tratam de elementos laminares em betão

armado cuja solicitação é maioritariamente perpendicular ao seu plano médio. Por esta razão, muita da teoria desenvolvida para a análise de lajes, pode ser aplicada neste tipo de elementos. A seguinte figura ilustram a forma como são solicitados.

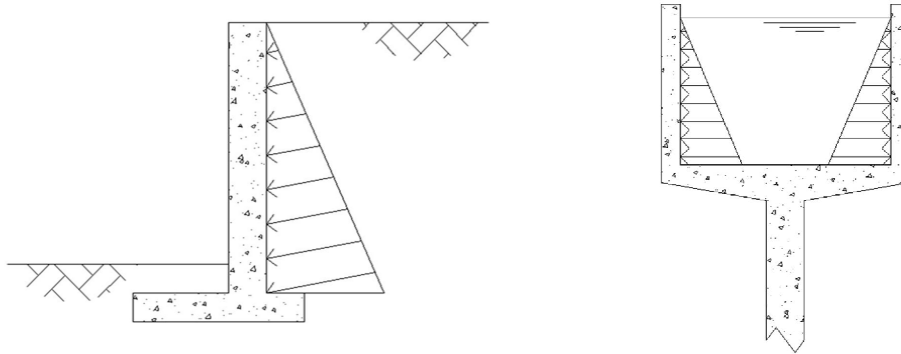


Figura 16. Parede de retenção (esquerda) e reservatório de água (direita)

No que diz respeito ao comportamento de paredes resistentes, podemos afirmar que a situação varia bastante. Embora também sejam elementos cuja espessura é bastante inferior às dimensões de superfície, as suas acções estáticas são maioritariamente na direcção do seu plano médio, e não perpendicularmente como acontecia com os outros elementos estudados anteriormente. No entanto, acções dinâmicas como sismos têm tendência a solicitar as paredes resistentes perpendicularmente ao nível das extremidades, originando assim esforços de flexão ao longo do elemento. Segundo Beyer (2008), foram realizados imensos ensaios, cujos resultados experimentais permitiram distinguir os parâmetros chave que caracterizam o comportamento destes elementos quer sob acções estáticas ou sob acções dinâmicas. Estes ensaios permitiram a compilação de documentos que orientam o seu dimensionamento. No que diz respeito à análise estrutural nesta área, podemos destacar o trabalho de Ile e Reynouard (2000), que propõem um modelo composto por várias camadas de elementos de casca fina (formulação de Kirchhoff que será abordada na Secção 2.4.1 que simulam o betão, e uma treliça metálica perfeitamente acoplada a estas camadas, que simulam o reforço metálico. Desta forma é possível obter a variação das tensões ao longo da espessura do betão. Ile e Reynouard voltam a usar uma modelação idêntica para o estudo de núcleos de escadas em forma de U em 2005 e Beyer em 2008.

2.3. Geometria

O elemento de casca trata-se de um sólido que é caracterizado por possuir uma espessura muito menor do que as dimensões da sua superfície média. Este sólido está sujeito a esforços de flexão que provocam curvatura da casca, e esforços do tipo membrana, que provocam deformações na direcção da superfície do mesmo. É usual desprezar-se a distorção provocada pela presença de esforços cortantes na casca, de forma a simplificar as análises.

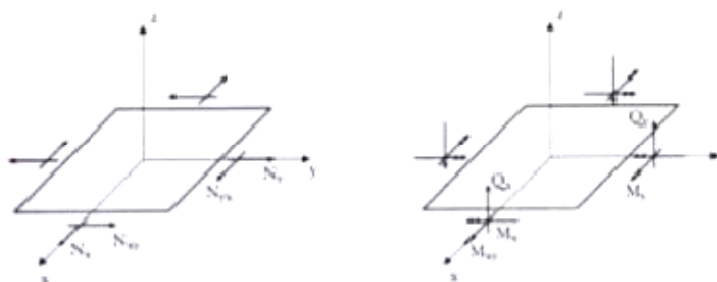


Figura 17. Representação esquemática dos esforços de membrana (esquerda) e de flexão e corte (direita) num elemento de casca (Soriano, 2003).

Os elementos de casca são sem dúvida os que têm demonstrado maiores dificuldades para o desenvolvimento de elementos finitos robustos e eficientes, devido à sua geometria poder ser curva e ao grande número de parâmetros envolvidos (Soriano, 2003).

2.4. Métodos de análise analítica linear de placas

Nesta secção será descrito o comportamento das lajes em função dos deslocamentos, deformações e esforços. Esta descrição será feita através da Teoria da Elasticidade e aproximando os elementos de placa a sólidos elásticos tridimensionais. Esta metodologia é bastante pesada sob o ponto de vista matemático e os seus resultados não são de fácil tratamento. Por esta razão, foram estabelecidas algumas simplificações que se baseiam no facto das placas possuírem uma espessura bastante inferior às suas dimensões em planta, e das suas solicitações serem maioritariamente perpendiculares à sua superfície (Castro e Leitão, 2005).

A compreensão de como as tensões e deformações se distribuem nas placas é fundamental para este trabalho, para que seja possível extrapolar-se os resultados que serão obtidos com elementos de barra, para elementos de casca.

Devido à natureza bidimensional das placas, as tensões internas resultantes são representadas através de momentos actuando em torno de eixos situados no plano médio da placa e por esforços cortantes actuando perpendicularmente à sua superfície (Clarke e Cope, 1984). Apesar de se entender que actuam em simultâneo, os momentos e os esforços cortantes encontram-se representados separadamente na Figura 18 e na Figura 19 respectivamente, tornando assim mais clara a sua compreensão.

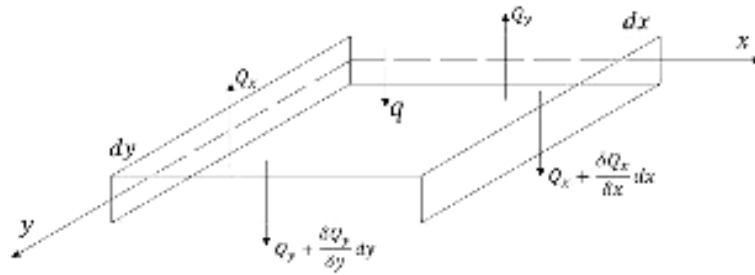


Figura 18. Esforços de corte por unidade de comprimento num elemento de laje (adaptado de Clarke e Cope, 1984)

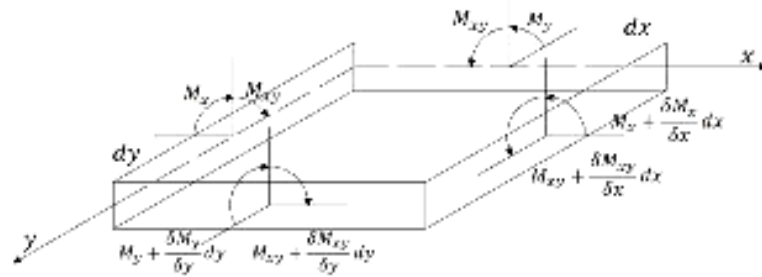


Figura 19. Momentos flectores por unidade de comprimento num elemento de laje (adaptado de Clarke e Cope, 1984)

A dedução que de seguida se apresenta, foi feita de acordo as expressões e demonstrações de Timoshenko (1989).

Para que exista equilíbrio segundo a direcção vertical:

$$0 = q dx dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx - Q_x dy$$

$$-q = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (1)$$

Para que exista equilíbrio em torno do eixo x:

$$0 = qdxdy \frac{dy}{2} + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dxdy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \frac{dy^2}{2} + M_y dx - \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy$$

E fazendo tender $dx, dy \rightarrow 0$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (2)$$

Para que exista equilíbrio em torno do eixo y:

$$0 = qdxdy \frac{dx}{2} + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \frac{dx^2}{2} + M_x dy - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_{xy} dy + \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dx$$

E fazendo tender $dx, dy \rightarrow 0$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (3)$$

As equações diferenciais de primeira ordem (1), (2) e (3), podem ser combinadas de forma a originar uma equação de segunda ordem, que relaciona momentos e carregamentos. Para tal, é necessário derivar a equação (2) em relação a y e a equação (3) em relação a x. Seguidamente aplica-se os resultados na equação (1), originando assim a seguinte equação:

$$-q = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \quad (4)$$

Esta equação tem cinco incógnitas e as condições de equilíbrio apenas fornecem três equações, pelo que é necessário recorrer às condições de deformação da laje:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

Nas equações acima descritas, w representa o deslocamento vertical da laje. De seguida, pode-se relacionar as deformações com as tensões, usando-se a Lei de Hooke:

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (9)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez(1-\nu)}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (10)$$

As seguintes figuras demonstram como as tensões normais e de corte se distribuem num elemento unitário de laje.

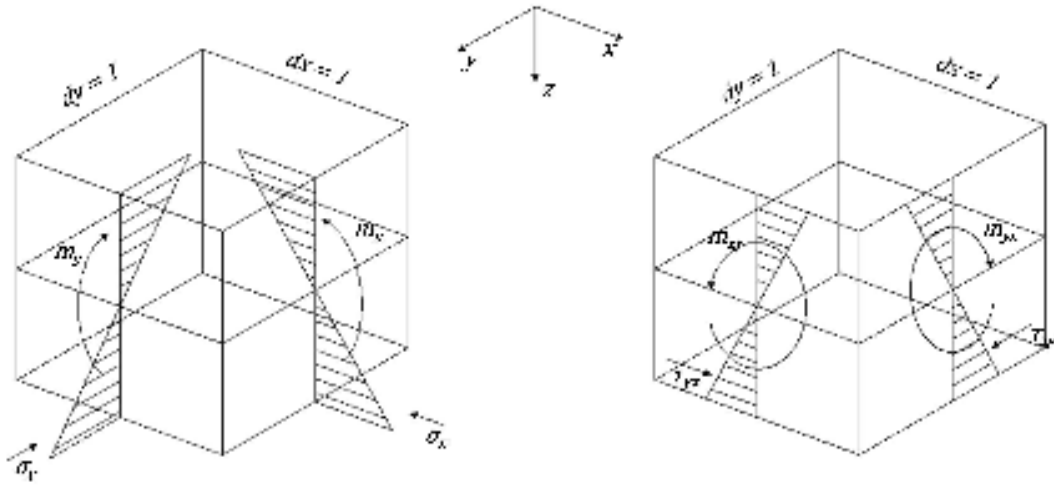


Figura 20. Variação linear das tensões normais e de corte ao longo da espessura de um elemento de laje (adaptado de Cachim, 2005)

Os momentos flectores e torsor podem ser calculados por integração dos momentos elementares $dM = z\sigma_{ij}dz$ ao longo da espessura do elemento de laje:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (11)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (12)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} z dz \quad (13)$$

Aplicando as equações (8), (9) e (10) nas equações (11), (12) e (13) respectivamente e tendo em consideração que a rigidez à flexão da placa vem dada por $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ temos:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (14)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (15)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (16)$$

E por último, aplicando as três equações anteriores à equação inicialmente deduzida (4), obtemos a equação das lajes ou de Lagrange, definida em 1811:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (17)$$

Segundo Cachim (2005), esta equação está condicionada ao seguinte conjunto de hipóteses:

- O material que compõe a placa é homogéneo e isótropo;
- As tensões perpendiculares ao plano médio da placa podem ser desprezadas;
- O plano médio não sofre nenhuma deformação no seu plano;
- Os pontos situados no plano médio da placa deslocam-se perpendicularmente ao mesmo;
- A esbelteza l_{min}/h é superior a 5 e as deformações devido às cargas perpendiculares ao plano da placa w são inferiores a $h/5$;
- Os efeitos das tensões de corte para placas delgadas seguem a teoria de Kirchhoff, enquanto para placas espessas é seguida a teoria de Mindlin. Ambas as teorias são explicadas na secção seguinte.

De acordo com Bandeira (2006), a solução analítica da equação de Lagrange, para a maioria dos casos práticos só é possível a partir de procedimentos baseados em séries trigonométricas. Um exemplo dessas séries é a solução de Navier ou de Levy, e mesmo assim, esta abordagem analítica só é exequível para alguns casos simples, como lajes rectangulares apoiadas simplesmente nos quatro bordos. Devido a estas desvantagens, faz todo o sentido desenvolver outros métodos mais simples de análise de elementos de casca como por exemplo, o uso de elementos de grelha que é usado nesta dissertação.

2.4.1. Teoria clássica ou de Kirchhoff

A teoria clássica ou de Kirchhoff é direccionada para um caso particular dos elementos de casca, as placas finas. Estes elementos são caracterizados por uma geometria plana e por neles actuarem esforços de flexão e de corte, mas não de membrana. Para que isto aconteça, é necessário que as solicitações que actuam nas placas sejam sempre normais à sua superfície.

Esta teoria tem como hipótese base, o facto de que a normal à superfície das placas, permanece normal à mesma após a deformação, ou seja, a distorção provocada pelo esforço cortante é desprezada, à semelhança de o que acontece nas vigas de Bernoulli. Para placas finas, esta aproximação é aceitável (Soriano, 2003).

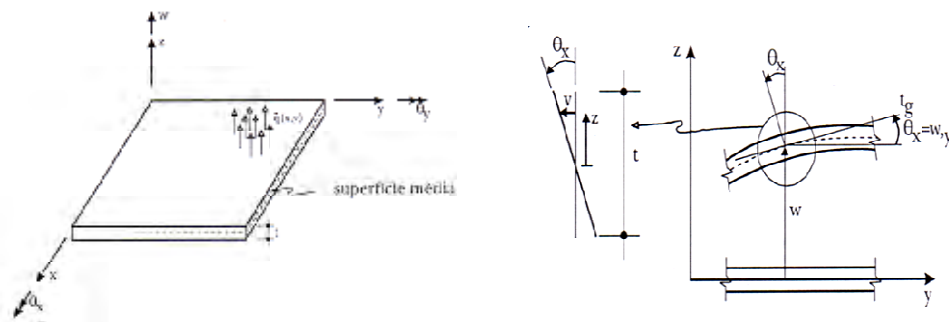


Figura 21. Comportamento de um elemento laminar de acordo com a teoria clássica ou de Kirchhoff (Soriano, 2003)

2.4.2. Teoria de Mindlin

A Teoria de Mindlin pode-se considerar superior à Teoria de Kirchhoff pelo facto de se aproximar mais do modelo tridimensional. Esta teoria é direccionada para as placas finas e espessas, mas oferece melhores resultados para placas com uma maior espessura.

Esta teoria tem como hipótese base o facto de que para cada esforço cortante, ocorre uma rotação β , que é a média das distorções devido às tensões de corte desse mesmo esforço, ou seja, ocorre um encurvamento ao longo da espessura do elemento. Esta rotação é então somada à rotação do segmento de recta normal à superfície média da placa, permanecendo rectilíneo, mas não mais normal a essa superfície após a deformação, à semelhança de o que acontece na viga de Timoshenko (Soriano, 2003).

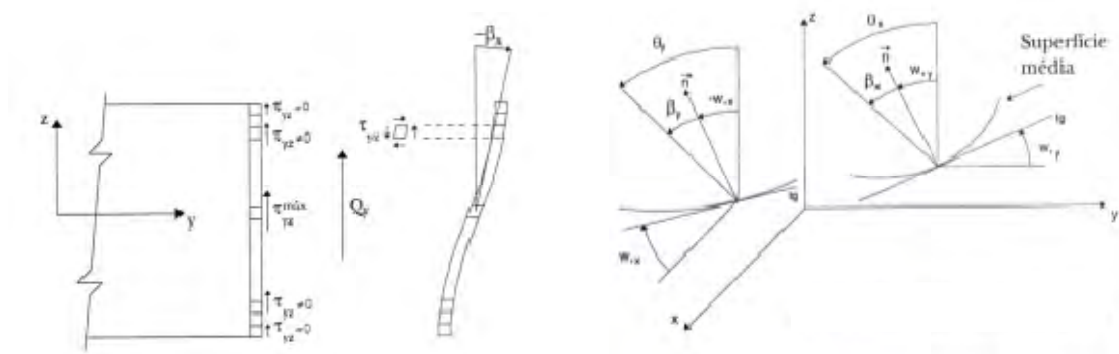


Figura 22. Comportamento de um elemento laminar de acordo com a teoria de Mindlin (Soriano, 2003)

2.5. Solução de Navier (1823)

Para que seja possível a resolução analítica da equação de Lagrange, é necessário impor condições fronteira e de carregamento específicas. Navier em 1823 apresenta expressões que através de séries trigonométricas permitem calcular deformações e momentos flectores de um elemento de placa simplesmente apoiado em todos os bordos (Timoshenko, 1959). A Figura 23 representa a forma como são aplicados os eixos na laje rectangular.

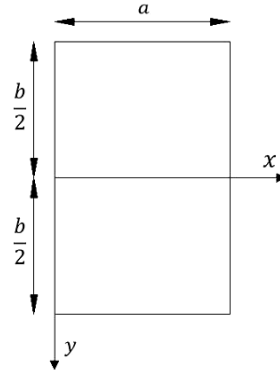


Figura 23. Representação esquemática da laje rectangular simplesmente apoiada nos bordos (adaptado de Timoshenko, 1959)

A expressão que permite calcular a deformação em qualquer ponto da laje é a seguinte:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \tanh \alpha_m + 2}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (18)$$

Sendo o valor de α_m dado pela expressão:

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (19)$$

Os momentos segundo as direcções x e y , sobre o eixo x , são dados pelas expressões:

$$M_x = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2\nu B_m - (1-\nu)A_m] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (20)$$

$$M_y = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m^2 [2\nu B_m + (1-\nu)A_m] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (21)$$

Sendo os valores de A_m e B_m dados pelas expressões:

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \tanh \alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad (22)$$

$$B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \cosh \alpha_m} \quad (23)$$

Como se pode observar as expressões para a resolução analítica da equação de Lagrange não são simples pelo que foram construídas tabelas no Microsoft Excel que fornecem directamente os valores de deformação em qualquer ponto da laje, e dos momentos flectores ao longo do eixo x ($y = 0$). Embora complexas, estas séries convergem muito rapidamente, bastando apenas o primeiro termo para o cálculo da deformação e dos três primeiros termos para obter os momentos com uma precisão de 97 a 98%. (Cachim, 2005). Os resultados obtidos através das folhas de cálculo do Microsoft Excel foram posteriormente comparados com os valores presentes em Castro (2000), de forma a comprovar a exactidão dos mesmos.

Esta aproximação analítica será usada na Secção 4.2 para avaliar os resultados fornecidos pela modelação usando-se malhas de vigas.

2.6. Analogia de grelha

2.6.1. Descrição do método

O uso de elementos de grelha na modelação de placas foi pela primeira vez implementada por Lightfoot e Swako em 1959. Estes investigadores constataram que os procedimentos de análise de pórticos planos e grelhas pelo método dos deslocamentos eram bastante parecidos e que as equações básicas de compatibilidade de deformações eram muito semelhantes nos dois casos. Dado isto, decidiram adaptar um programa de cálculo de pórticos, para que também permitisse calcular malhas de elementos de barra (Dória, 2007).

Modelações recorrendo-se a elementos de grelha, trata-se de uma técnica relativamente simples, económica e correntemente utilizada para análises de lajes com geometrias mais elaboradas ou condições fronteira mais complexas. Neste processo, a superfície continua de uma laje é substituída por um conjunto de vigas dispostas em duas direcções ortogonais, com propriedades equivalentes à da laje (Castro e Leitão, 2005).

Segundo Castro (2000), é necessário ter cuidado com os parâmetros usados na modelação, para que os resultados obtidos possam ter o significado desejado. Entre alguns dos parâmetros que é necessário definir, destacam-se os seguintes:

- Quantidade de elementos (refinamento da malha);
- Propriedades geométricas e materiais dos elementos;
- Tipos de apoio para os nós pertencentes aos bordos;
- Distribuição do carregamento pelos elementos.

O modo como foram definidos estes parâmetros encontra-se descrito na Secção 3.1.1.

Por último, é necessário entender a relação existente entre os deslocamentos nodais, e os deslocamentos na laje, assim como os esforços em cada elemento da grelha, e os esforços existentes na laje. A forma como se pode tratar os resultados das análises usando-se elementos de grelha é descrita na Secção 2.6.2.

2.6.2. Deslocamentos e esforços na analogia de grelha

De acordo com Castro (2000), pode-se constatar que cada nó de uma grelha tem um deslocamento transversal (w) e duas rotações (θ_x e θ_y), que é precisamente o campo de deslocamentos de qualquer ponto de uma laje. A seguinte figura ilustra essa correspondência.

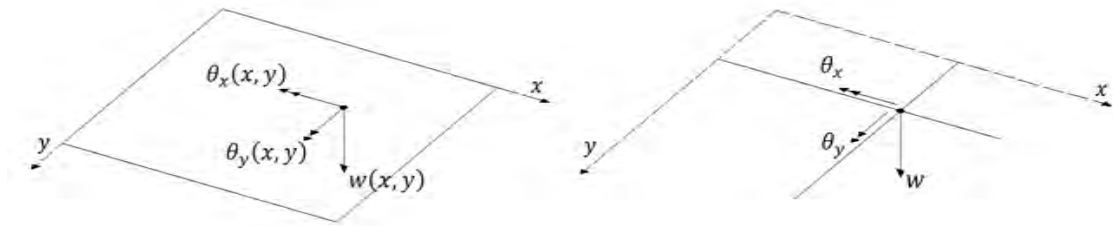


Figura 24. Campo de deslocamentos nas lajes e nas grelhas (adaptado de Castro, 2000).

O tratamento dos esforços já não pode ser feito de forma tão directa. Começemos por observar um exemplo da distribuição dos momentos flectores na grelha de elementos.

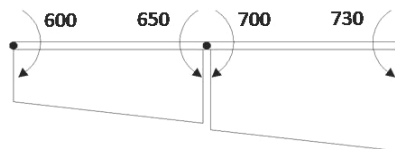


Figura 25. Distribuição dos momentos flectores (adaptado de Clarke e Cope, 1984)

Partindo do princípio que o carregamento foi aplicado na grelha sob a forma de cargas pontuais nos nós, é de esperar que o diagrama de momentos flectores seja linear ao longo de cada elemento, tal como é possível observar na Figura 25. A existência de momentos de torção nos outros dois elementos que atravessam o nó central provoca uma descontinuidade no

diagrama. Esta variação não existe quando se carrega uma laje, pelo que o momento que é considerado no nó será a média entre o momento à direita e o momento à esquerda. Seguidamente, é necessário dividir este momento médio pela distância entre os elementos da grelha nesta direcção. Este procedimento tornar-se-á mais claro ao observar-se o seguinte exemplo de cálculo dos esforços cortantes nas duas direcções. (Clarke e Cope, 1984).

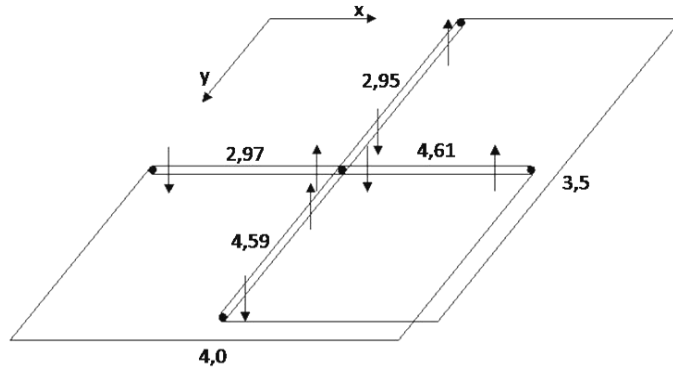


Figura 26. Distribuição dos esforços cortantes. (adaptado de Clarke e Cope, 1984)

Tendo em consideração a figura acima representada, os esforços cortantes equivalentes segundo as duas direcções poderão ser calculados do seguinte modo:

$$Q_x \approx \frac{4,61 + 2,97}{2 \times 3,5} = 1,08 \text{ kN/m}; \quad Q_y \approx \frac{4,58 + 2,95}{2 \times 4,0} = 0,94 \text{ kN/m}$$

Por último temos os momentos de torção, cujo processo de cálculo difere bastante. Observe-se a seguinte figura que representa a distribuição dos momentos de torção ao longo de quatro elementos.

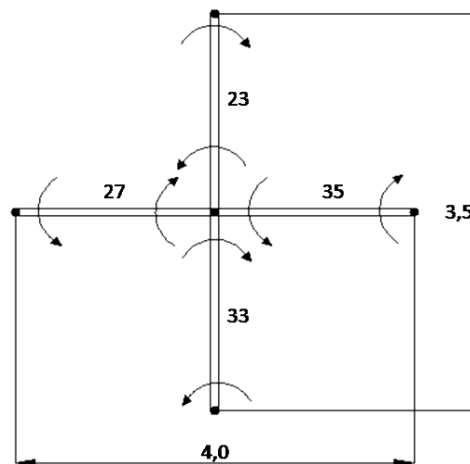


Figura 27. Distribuição dos momentos de torção (adaptado de Clarke e Cope, 1984)

Para que seja possível calcular-se o momento torsor equivalente, é necessário ter em consideração os quatro momentos de torção em simultâneo, que se relacionam do seguinte modo:

$$M_{xy} \approx \frac{-\left(\frac{27+35}{2 \times 3,5}\right) - \left(\frac{33+23}{2 \times 4,0}\right)}{2} = -7,93 \text{ kN.m/m}$$

Clarke e Cope (1984) fazem ainda algumas recomendações para o cálculo destes esforços. A exactidão deste processo está dependente da distância entre os elementos e da relação entre o refinamento escolhido para cada direcção. Sempre que possível, deve-se usar o mesmo espaçamento para todos os elementos e no caso dos valores sobre os quais se vai calcular uma média houver uma diferença superior a 30 %, é aconselhável que se refine mais a malha e se volte a calcular os esforços.

2.6.3. Influência do coeficiente de Poisson

Segundo Carvalho (1994), um dos maiores inconvenientes da modelação de elementos de placa usando-se elementos de grelha, é a não consideração da deformação transversal das barras, que é uma das principais características dos elementos de placa. Este aspecto provoca pequenas diferenças entre os deslocamentos e esforços mesmo que se use uma malha pouco espaçada, já que a influência do coeficiente de Poisson (ν) é distinta nos dois elementos.

2.6.3.1. Variações nos deslocamentos:

Tal como referido anteriormente, a rigidez à flexão de uma placa com uma largura igual a b e espessura igual a h vem dada pela expressão:

$$D = \frac{Eb h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Enquanto para um elemento de barra a rigidez à flexão vem dada pela expressão:

$$I = \frac{Ebh^3}{12}$$

Daqui pode-se logo concluir que a rigidez à flexão de um elemento de placa, é em geral superior à de um elemento de barra. O seguinte gráfico demonstra essa variação quando $b = 1$, $h = 0,2$ e o módulo de elasticidade $E = 30 \text{ GPa}$.

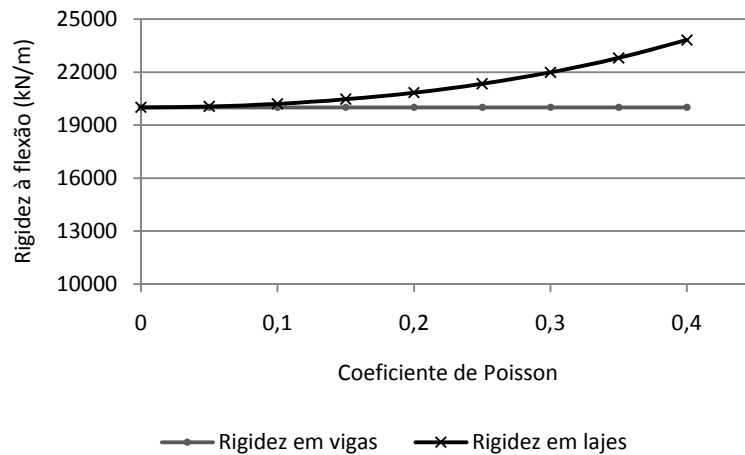


Figura 28. Variação da rigidez à flexão com o módulo de Poisson

Estas variações na rigidez à flexão vão originar maiores deslocamentos nos elementos de barra do que nos elementos de placa.

Outro aspecto interessante é as variações dos deslocamentos entre uma malha de vigas e um elemento de placa. De acordo com Carvalho (1994), o coeficiente de Poisson não influencia os deslocamentos de uma viga isolada, enquanto que numa malha de vigas, provoca um aumento dos mesmos. Este aspecto deve-se ao facto da rigidez à torção ser inversamente proporcional ao módulo de distorção, que por sua vez é dado pela expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Um aumento do coeficiente de Poisson provoca um decréscimo no módulo de distorção, reduzindo a rigidez à torção. Como é de esperar, este decréscimo de rigidez irá provocar maiores deslocamentos, ao contrário do que se sucede nos elementos de placa.

2.6.3.2. Variações nos esforços

Castro e Leitão (2005) apresentam um exemplo interessante para o entendimento da variação dos esforços entre elementos de placa e grelhas de vigas. Observe-se a seguinte placa representada por cinco vigas em cada direcção, e a correspondente deformada quando se aplica um campo de deformações que provoca a flexão das barras segundo x , mas mantêm as barras segundo y indeformadas (por simplificação, apenas se representou as vigas segundo a direcção x):

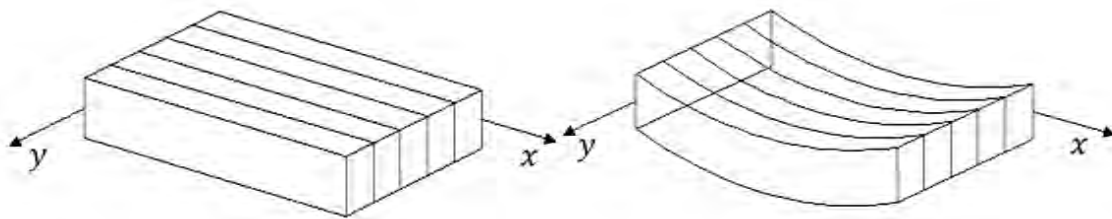


Figura 29. Deformação por flexão segundo x de uma malha de vigas (adaptado de Castro e Leitão, 2005).

Desta forma, à primeira vista seria de esperar que o campo de momentos $m_y(x, y)$ seria igual a zero. No entanto se observarmos a deformada da secção transversal da placa, podemos constatar que é necessário que o campo de momentos $m_y(x, y)$ seja não nulo.

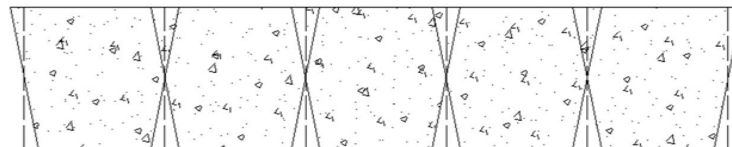


Figura 30. Deformação da secção transversal de uma placa composta por vigas (adaptado de Castro e Leitão, 2005).

A soma da deformada de cada viga dá origem a uma situação absurda, em que existem zonas com sobreposição do betão e zonas onde não existe sequer material. Para que esta situação não ocorra, é necessário que surja momentos transversais que contrariam esta deformação. Esses momentos vêm dados pela expressão:

$$m_y(x, y) = v \cdot m_y(x, y)$$

2.7. Método dos elementos finitos na análise estrutural

Tal como referido anteriormente, a resolução analítica da equação de Lagrange só é possível com geometria, condições fronteira e carregamentos muito particulares, pelo que faz todo o sentido desenvolver-se métodos que permitam alcançar soluções aproximadas. Surgem então os métodos numéricos, dentro dos quais segundo Leitão e Castro (2005) se podem destacar os seguintes:

- Método dos elementos finitos;
- Método das diferenças finitas;
- Método dos elementos de fronteira.

Nesta secção, será abordado o método dos elementos finitos pelo facto de ser o mais usado na análise de estruturas.

No âmbito da análise estrutural, o método dos elementos finitos tem como principal objectivo, a determinação do estado de tensão e deformação de um sólido de geometria arbitrária, sujeito a um conjunto de acções exteriores (Azevedo, 2003). Este tipo de análise tem uma grande aplicabilidade, quer seja em estruturas reticuladas compostas por colunas e vigas, estruturas laminares compostas por elementos de casca, ou ainda estruturas arbitrárias com componentes nas três direcções (Clough e Penzien, 1993).

Actualmente, o desenvolvimento de *software* de cálculo estrutural baseado no método dos elementos finitos, já permite que qualquer utilizador sem grandes conhecimentos de engenharia de estruturas o use para efeitos de análise estrutural. A grande facilidade de introdução das características geométricas, as vastas bases de dados de comportamento dos materiais de construção e o bom interface gráfico dos programas, fazem com que os utilizadores acreditem cegamente nos resultados obtidos sem nunca questionarem a veracidade dos valores, o tipo de análise feita ou a concordância do modelo numérico com a estrutura real. Este facto tem sido confirmado pelo elevado número de colapsos de estruturas acabadas de construir ou pelo grande número de reparações em construções recentes (Azevedo, 2003).

É importante ter fortes conhecimentos sobre o método dos elementos finitos, de forma a compreender o modo como as estruturas estão a ser analisadas, e até que ponto é que os resultados podem ser considerados como válidos.

No que diz respeito à análise não-linear de elementos de casca em betão armado usando o método dos elementos finitos, Phuvoravan e Sotelino (2005) afirmam que existem duas possíveis técnicas. Na primeira, denominada por modelização discreta, o betão é modelado através de elementos sólidos tridimensionais e a armadura é modelada através de treliças metálicas ligadas perfeitamente aos elementos anteriores. Esta ligação pode ser aplicada fazendo com que o aço e o betão partilhem os mesmos nós ou em alternativa, criando um outro elemento com uma determinada rigidez, que liga os nós do betão aos nós do reforço metálico. Este segundo método tem a vantagem de poder simular o escorregamento da armadura. Embora os resultados possam ser bastante realísticos, a construção de um modelo deste tipo é bastante difícil e mostra-se bastante pesada a nível computacional. A outra técnica para a modelação destes elementos é a denominada abordagem por camadas já referida na Secção 2.2. Neste método o betão é modelado por diversas camadas de elementos de casca e a armadura por uma treliça. Este método é relativamente simples mas não produz resultados realísticos quanto ao comportamento da armadura.

O uso destes métodos numéricos apenas se justifica para estruturas com geometria complexa ou com carregamentos irregulares já que requerem muito tempo e grande esforço computacional.

2.7.1. Modelo de fibras

O comportamento não linear dos materiais será representado usando-se um modelo de fibras ao nível das secções. Tal como referido por Guedes (1997), o modelo de fibras pode ser visto como um avanço no refinamento dos modelos usados para a simulação de elementos de barras. De facto, este método usa as mesmas formulações cinemáticas para o cálculo da deformação do eixo longitudinal do elemento (dois deslocamentos e uma rotação em cada nó), variando apenas no processo de determinação das forças resistentes, em que vez de considerar uma lei constitutiva global ao nível das secções transversais, o modelo de fibras calcula a deformação e tensão numa série de pontos que descrevem uma malha nas secções das barras. Ou seja, a estrutura é dividida num conjunto de elementos de barra, que por sua vez são subdivididos num conjunto de fibras longitudinais.

Pode-se afirmar que os modelos de fibras localizam-se entre as formulações locais e globais. Isto é, embora o algoritmo determine as deformações globais ao nível dos pontos de Gauss do elemento estrutural, a resposta é obtida através da integração das forças nos diferentes

pontos das secções transversais. Cada ponto é caracterizado por uma dada lei constitutiva, que depende da sua localização na Secção transversal: núcleo da viga, recobrimento da viga ou armadura (Guedes, 1997).

As maiores limitações deste modelo estão no facto de exigir um esforço computacional demasiado grande e na impossibilidade de considerar as tensões de corte e axiais em simultâneo. Apesar disto, não existe dúvida que o modelo de fibras é uma óptima ferramenta para a análise não linear de estruturas, particularmente nas que são comportas por elementos de betão armado.

A aplicação do modelo de fibras implica as seguintes simplificações:

- A distribuição da deformação ao longo da secção é linear, ou seja, as secções mantêm-se planas após a deformação;
- A fendilhação do betão ocorre maioritariamente na direcção perpendicular ao eixo longitudinal;
- É assumido que a rotura não se dá devido ao esforço transversal e que as tensões de corte não influenciam a relação momento/curvatura.

2.7.2. Importância das análises não lineares

A Importância da implementação da não linearidade material nos modelos numéricos prende-se essencialmente com o facto de podermos observar o que realmente ocorre com a estrutura em serviço, da forma mais próxima possível (Carvalho, 1994).

O uso de elementos estruturais mais esbeltos e consequentemente mais deformáveis, aumenta a necessidade de se conhecer, com rigor, o estado de deformação da estrutura. Nestas condições, é provável que o factor determinante no dimensionamento seja os estados limites de serviço (flechas máximas) e não propriamente os estados limites últimos (carga de colapso).

O comportamento de uma estrutura de betão armado, depende essencialmente do grau de fendilhação do betão e de plastificação de ambos os materiais, podendo-se mostrar que para cargas comuns de serviço, ocorre a não linearidade do betão uma vez que os esforços necessários para que se atinja o momento de fendilhação são em geral relativamente baixos. Sendo assim, faz todo o sentido que mesmo para as verificações da estrutura em serviço, deva-se tentar usar modelos que tenham em consideração o comportamento não linear dos materiais (Carvalho, 1994).

O bom conhecimento do comportamento não linear das estruturas, pode também significar ganhos económicos interessantes na medida em que, caso se conheça bem a redistribuição dos

esforços devido a ocorrência de fendilhações ou plastificações, pode-se executar um detalhamento das armaduras que origine um máximo de aproveitamento dos dois materiais.

Por último, podemos também referir que conhecer-se o estado de deformação final da estrutura com rigor, pode permitir ao projectista indicar contra-flechas mais adequadas.

Tal como referido anteriormente, a implementação da não linearidade será feita através de modelos de fibras, mas para tal é necessário que durante os ensaios numéricos os carregamentos ou deslocamentos sejam aplicados de forma incremental. Desta forma, assim como a integração de uma função pode ser substituído por somatórios de integrais parciais, também as deformações de uma estrutura podem ser obtidas pela soma de n etapas de cargas (Carvalho, 1994).

Uma das principais do uso desta técnica está na possibilidade de trabalhar em cada etapa com uma rigidez próxima da realidade, já que a cada incremento pode-se actualizar as propriedades dos materiais tal com o módulo de elasticidade longitudinal, ou introduzir-se danos como fendilhações. Desta forma, um problema não linear passa a ser resolvido de uma forma linear, ou seja, através de uma soma de parcelas lineares.

3. MODELAÇÕES NUMÉRICAS

3.1. OpenSees

Este *software* trata-se de uma ferramenta informática para análise estrutural, criada na National Science Foundation e patrocinada pela Pacific Earthquake Engineering Center (PEER). O nome OpenSees, significa Open System for Earthquake Engineering Simulation, e tal como o nome indica, permite aos utilizadores que através do método dos elementos finitos, a simulem sistemas sujeitos a cargas estáticas e/ou dinâmicas, tais como sismos.

O uso do programa é feito através da criação de scripts, usando a linguagem de programação, tcl (tool control language). Esta plataforma de análise estrutural apresenta fortes potencialidades tais como a grande disponibilidade de materiais de construção, de elementos estruturais, de tipos de análise e modos de simulação.

A seguinte secção descreve como foi elaborado o código que constrói a malha de vigas ligadas por nós nos pontos onde se interceptam, de forma a simular o comportamento de elementos de casca.

3.1.1. Construção do código

3.1.1.1. Unidades

A construção do script é iniciada definindo-se alguns parâmetros base tais como o número de dimensões espaciais e número de graus de liberdade para a modelação. De seguida, é necessário definir-se o sistema de unidades a usar-se. Foi descarregado do site oficial do OpenSees, um ficheiro que define as unidades, assim como a relação existente entre as diversas grandezas físicas (força, distância e tensão). O sistema de unidades disponível é o norte-americano (US), já que o OpenSees é um *software* oriundo de Berkeley, Califórnia. Apesar disto, todos os resultados serão convertidos e apresentados no sistema internacional (SI).

3.1.1.2. Modelos dos materiais

3.1.1.2.1. Análise linear

O script foi construído de forma a ser possível realizar-se tanto análises lineares como não lineares. Para o primeiro tipo de análise, o OpenSees necessita apenas do módulo de elasticidade longitudinal (E_c) e do coeficiente de Poisson (ν) do betão armado. A primeira grandeza foi calculada de acordo com o estabelecido no “American Concrete Institute” (ACI), em que o módulo de elasticidade longitudinal surge em função da resistência característica à compressão (f_c) do betão, através da seguinte fórmula:

$$E_c = 57000\sqrt{f_c} \quad (Ksi) \quad \text{no sistema US} \quad (24)$$

$$E_c = 5600\sqrt{f_c} \quad (MPa) \quad \text{no sistema SI} \quad (25)$$

Para o coeficiente de Poisson (ν), Beyer (2008) sugere valores entre 0,20 e 0,25.

3.1.1.2.2. Análise não linear

Para este tipo de análises, o OpenSees possui uma biblioteca de materiais já pré-definidos em que basta definir alguns parâmetros, para que sejam construídas as curvas que caracterizam as leis constitutivas dos materiais.

Para os varões de aço, foi escolhido o material definido no OpenSees como “Steel02”. Com esta opção, é construído um material uniaxial que segue o modelo Giuffré-Menegotto-Pinto (Mazzoni et al., 2006) As expressões e regras que este modelo usa para determinar a relação tensão/deformação para o aço pode ser encontrada em Menegotto and Pinto (1973).

A Figura 31 representa os parâmetros envolvidos na construção da curva tensão/deformação e a Figura 32 ilustra o comportamento do material quando sujeito a vários ciclos de carga/descarga.

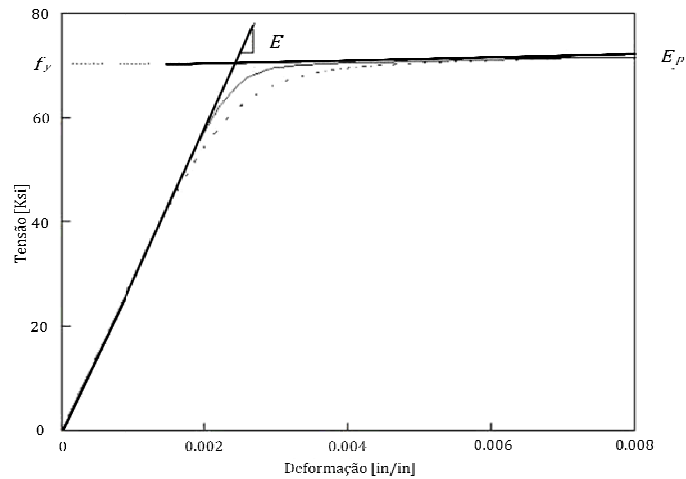


Figura 31. Representação dos parâmetros envolvidos na construção do diagrama tensão – deformação.

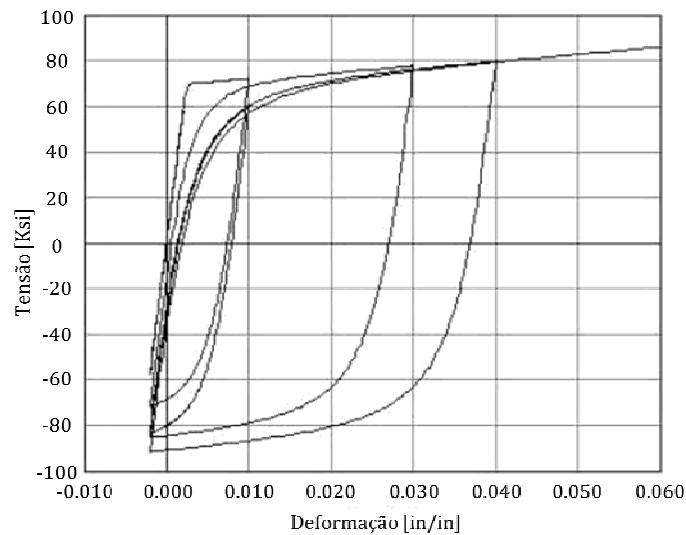


Figura 32. Curva de comportamento do material sujeito a ciclos de carga.

Regra geral, o comportamento do betão no interior de vigas, é caracterizado por se tratar de um betão confinado, tendo uma lei constitutiva diferente do betão que envolve o núcleo da viga. Embora neste código se esteja a construir malhas de vigas individuais, é importante entender que o objectivo final é a simulação do comportamento de elementos de casca e o reforço deste tipo de elemento, é geralmente composto por barras longitudinais nas duas direcções, podendo existir armadura tanto na face superior como inferior. Ou seja, não é comum aplicar-se estribos que confinem o betão, garantindo-lhe um comportamento distinto do betão não confinado. Por esta razão, o modelo escolhido para simular o betão foi o “concrete03”, ao

qual foram atribuídas características quanto à tensão resistente e deformações, típicas do betão não confinado (Todeschini parabolic model) (Mazzoni et al., 2006).

A Figura 33 representa os parâmetros que é necessário definir no código, de forma a ser possível a construção da curva tensão/deformação e a Figura 34 ilustra o comportamento do material quando sujeito a vários ciclos de carga/descarga.

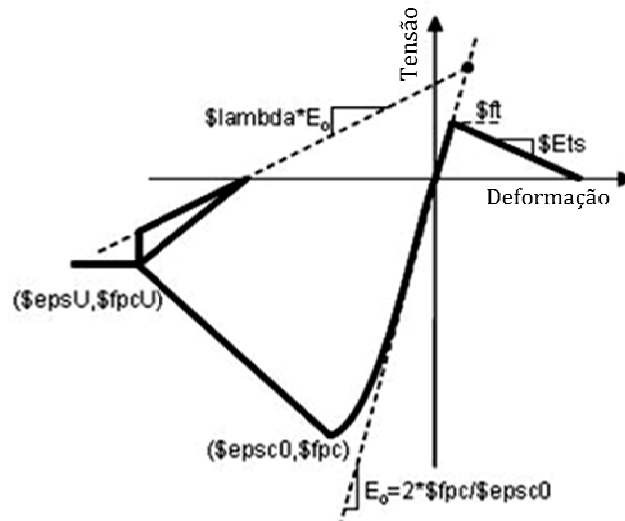


Figura 33. Representação dos parâmetros envolvidos na construção do diagrama tensão – deformação.

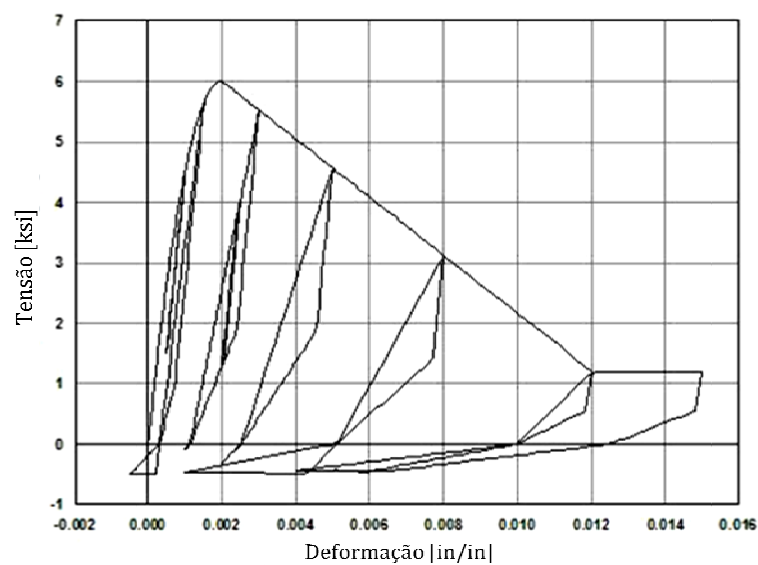


Figura 34. Curva de comportamento do material sujeito a ciclos de carga.

3.1.1.3. Secções

3.1.1.3.1. Dimensões

As dimensões a atribuir às vigas estão directamente relacionadas com o tamanho da laje que se pretende modelar, e com o refinamento da malha. Em ambas as direcções, a altura a atribuir às vigas (h_x, h_y) será igual à espessura (t) da laje.

$$h_x = h_y \quad (26)$$

De acordo com Castro (2000), a largura das vigas interiores será dada pelas seguintes expressões:

$$b_x = \frac{l_y}{dirx-1}, b_y = \frac{l_x}{diry-1} \quad (27)$$

Em que :

l_y – Comprimento da laje segundo a direcção y ;

l_x – Comprimento da laje segundo a direcção x ;

$diry$ – Número de vigas na direcção y ;

$dirx$ – Número de vigas na direcção x .

Enquanto que a largura das vigas de bordo deverão ser metade da largura das vigas interiores, ou seja:

$$b_{xb} = \frac{b_x}{2}, b_{yb} = \frac{b_y}{2} \quad (28)$$

A Figura 35 representa a forma como uma laje foi dividida num conjunto de vigas. Os eixos representados tratam-se de eixos locais.

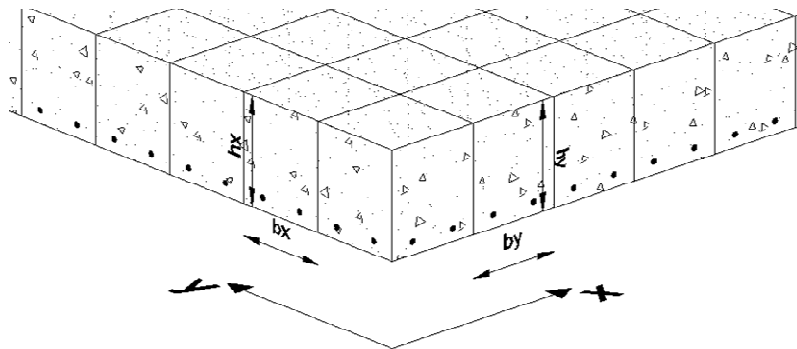


Figura 35. Representação da divisão de uma laje numa malha de vigas

3.1.1.3.2. Secções para análises lineares

Para a execução deste tipo de análise é necessário fornecer ao código as seguintes propriedades geométricas das vigas:

A - Área da secção da viga;

I_y - momento de inércia em torno do eixo y ;

I_z - momento de inércia em torno do eixo z ;

G - Módulo de distorção;

J - Momento de inércia de torção.

Admitindo uma secção rectangular, eis as expressões usadas para o cálculo da área e dos momentos de inércia em torno de y e z (convenção segundo a Figura 36):

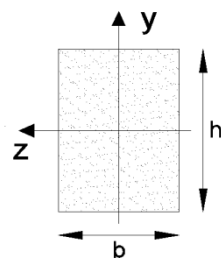


Figura 36. Secção da viga elástica

$$A = b \times h$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_z = \frac{b h^3}{12}$$

O módulo de distorção para o betão pode ser calculado segundo a seguinte expressão:

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (29)$$

Em que:

E_c - Módulo de elasticidade longitudinal;

ν - Coeficiente de Poisson.

O cálculo do momento de inércia de torção (J) mereceu especial atenção, pelo facto de existirem várias sugestões para a sua determinação.

O momento de inércia de torção de secções rectangulares em barras isoladas pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$J = \frac{h b^3}{3} \quad \text{se } h \gg b \quad (30)$$

No entanto, a inércia de torção das vigas que constituem a malha deve ter em consideração o facto que o objectivo final é representar o comportamento de elementos de casca, e logo, não terá o mesmo valor caso se quisesse estudar uma barra isolada. Dória (2007) propõe a seguinte expressão para o cálculo deste parâmetro:

$$J = \frac{3h^3b^3}{10(h^2 + b^2)} \quad (31)$$

Outra abordagem ao cálculo da inércia de torção é sugerida por Hambly (1976), que afirma que este parâmetro deve ser o dobro da inércia à flexão segundo z , vindo assim dada pela expressão:

$$J = \frac{bh^3}{6} \quad (32)$$

Outra alternativa à abordagem da rigidez à torção é considerá-la nula, admitindo assim que os carregamentos são suportados unicamente pela rigidez à flexão das vigas.

A rigidez à torção influencia fortemente os deslocamentos sofridos pela malha, pelo que foram realizados vários ensaios de forma a verificar qual das expressões oferece melhores valores e os respectivos resultados encontram-se descritos na Secção 4.2.

3.1.1.3.3. Secções para análises não lineares

O processo de descrição das secções das vigas para análises não lineares difere bastante do processo anteriormente descrito. A única propriedade geométrica que é necessário calcular é o momento de inércia à torção, e a sua determinação foi feita tal como descrito na secção anterior. O cálculo dos restantes parâmetros é feito definindo as dimensões da viga, os materiais que a compõem e a posição dos mesmos. Desta forma é construída uma secção de fibras, tal como representado na Figura 37.

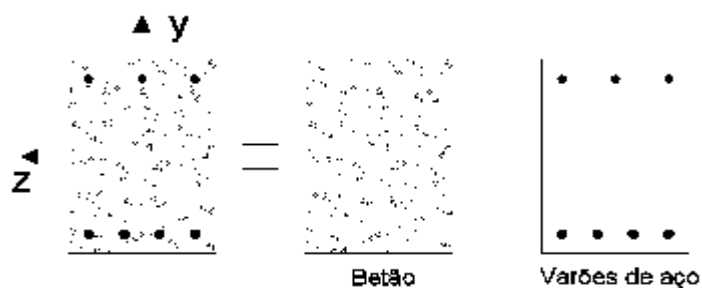


Figura 37. Representação de uma viga segundo o modelo de fibras.

Para a criação de uma secção de betão armada tal como a representada a cima, é necessário estabelecer primeiro o material que compõe a secção (neste caso o betão) e de seguida através da introdução de coordenadas, define-se a localização do reforço, e como é que este é composto (número e diâmetro dos varões de aço). A posição deste reforço está dependente do recobrimento que se pretende atribuir às vigas.

Por último, a secção é subdividida em fibras individuais através das quais se realiza a integração da resposta não linear uniaxial do material, podendo-se obter o estado tensão-deformação de qualquer uma das fibras. Este procedimento tem em conta o avanço da plasticidade na secção do elemento e a deformação das fibras de acordo com a lei constitutiva do material que lhe foi atribuído. Mesmo para níveis de não linearidade elevados, a distribuição da não linearidade material é assegurada caso se defina um número de fibras apropriado (de 100 a 300 fibras numa análise tridimensional) (Bhatt, 2007).

3.1.1.4. Nós

Após a definição dos materiais e secções dos elementos que irão compor a estrutura, pode-se iniciar a construção espacial da mesma. No OpenSees, para que seja possível a introdução de qualquer elemento estrutural, é necessário inserir um conjunto de nós que definam a estrutura. Neste caso, como se pretende produzir uma malha de vigas, foi criado um código que gera uma rede de nós que depende do tamanho da laje que se pretende modelar, e do refinamento. Cada nó é criado definindo-se três coordenadas espaciais e um número que o identifica. A Figura 38 representa o sentido em que é feita esta numeração (os eixos representados tratam-se de eixos locais).

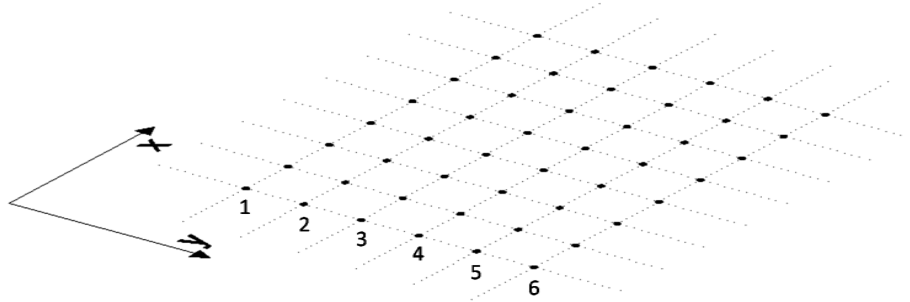


Figura 38. Representação da grelha de nós no OpenSees.

A introdução dos nós que definem colunas, fundações ou outros elementos estruturais pode ser feita um a um, já que se trata de um procedimento simples. É importante que se entenda bem todo o processo de criação dos nós, para que posteriormente se possa adicionar aos mesmos carregamentos, massas, limitações de rotações ou translações, etc.

3.1.1.5. Elementos

A escolha do tipo de elemento que irá ligar os nós está dependente do tipo de análise que se pretende efectuar. Para análises lineares, opta-se por um elemento denominado por *elasticBeamColumn*, que se relaciona com as características geométricas e materiais definidas previamente para este tipo de análise. Já em análises não lineares, é necessário escolher-se um elemento denominado por *nonlinearBeamColumn*, ao qual se atribui a secção de fibras descrita anteriormente. À semelhança de o que ocorre com os nós, também nos elementos é necessário definir um número que identifica o elemento. Esta numeração é inicialmente feita para os elementos na direcção y, e posteriormente para os elementos na direcção x. A Figura 39 ilustra este processo.

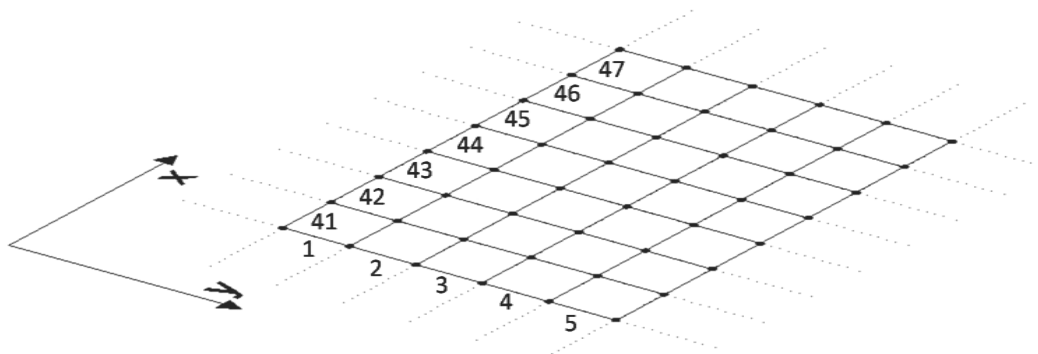


Figura 39. Representação dos elementos de grelha no OpenSees.

O bom conhecimento de como é feita a numeração dos elementos é fundamental para que posteriormente se possa escolher os elementos certos para se registar esforços e tensões. O código que gera os elementos foi feito de tal forma a que seja possível a introdução de vigas com características diferentes em determinadas posições, como por exemplo, nos bordos da laje. Desta forma é possível construir não só lajes fungiformes, como também lajes cujo sistema de apoio baseia-se em vigas.

Seguidamente pode-se construir colunas que ligam a malha de vigas a outros elementos estruturais. Todo o processo de criação de nós e elementos pode ser usado novamente para a criação de lajes em outros pisos, ou com algumas modificações, paredes resistentes ou de retenção.

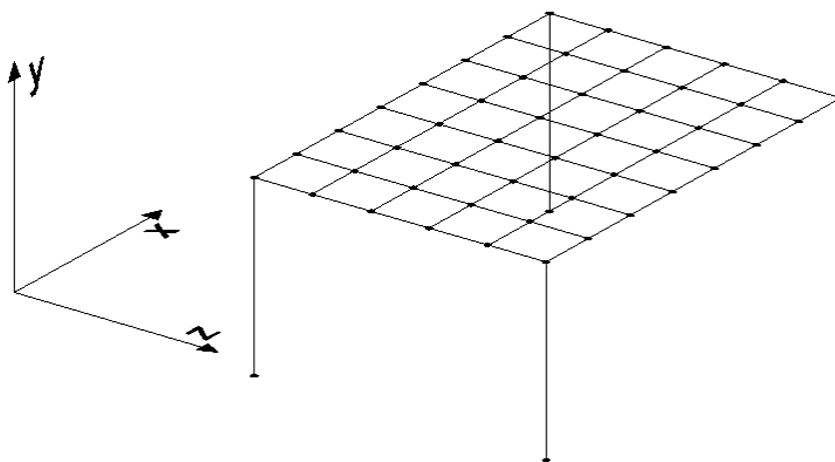


Figura 40. Representação de um elemento de casca ligado a pilares no OpenSees.

3.1.1.6. Carregamentos

Tendo em consideração o peso volúmico do betão (γ_c) e as dimensões da laje, o código calcula automaticamente o peso próprio, e distribui-o pela superfície da laje, podendo ser adicionadas outras sobrecargas ao peso próprio. Este carregamento é aplicado na laje sobre a forma de cargas pontuais nos nós da malha de vigas. Os valores destas cargas pontuais irão depender da posição do nó em questão, ou seja, se este encontra-se no canto, bordo ou interior da laje. Basicamente, a carga pontual a aplicar num dado nó, será directamente proporcional à sua área de influência. A Figura 41 ilustra as áreas de influência para cada tipo de nó.

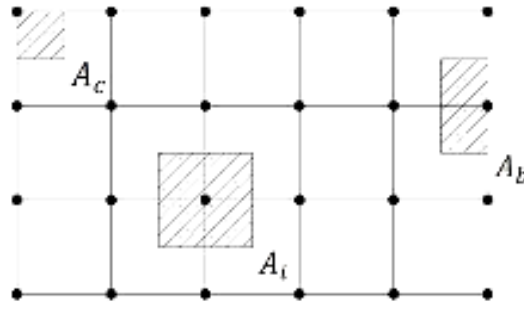


Figura 41. Área de influência em função da posição do nó.

As áreas acima apresentadas são calculadas através das seguintes expressões:

$$A_c = \frac{b_x \times b_y}{4} \quad (33)$$

$$A_b = \frac{b_x \times b_y}{2} \quad (34)$$

$$A_i = b_x \times b_y \quad (35)$$

Seguidamente, para o cálculo da carga pontual, basta multiplicar a área de influência do respectivo nó, pela carga distribuída que se pretende aplicar na laje.

3.1.1.7. Massas

Para que sejam possíveis análises dinâmicas, é necessário definir onde se encontram as massas na estrutura. A aplicação deste parâmetro é feita de forma análoga à aplicação de cargas, onde em vez de se multiplicar a área de influência de cada nós por um carregamento, multiplica-se pela massa total da laje. O código permite também que sejam aplicadas massas pontuais que representem por exemplo equipamentos, pilares ou paredes.

3.1.1.8. Outputs

Toda a informação resultante das análises é extraída através do comando *recorder*. A aplicação de um recorder a um nó ou a um elemento dá acesso a dados distintos. Segue-se uma lista da informação que pode ser obtida.

Para nós:

- Deslocamento;
- Velocidade;
- Aceleração;
- Deslocamento incremental;
- *Drift* (definindo dois nós);
- Reacção (no caso do nó ser um apoio).

Para elementos:

- Esforços globais (em relação aos eixos globais);
- Esforços locais (em relação aos eixos locais);
- Rigidez;
- Tensões ao longo da secção;
- Deformações ao longo da secção;
- Curva tensão/deformação para uma dada fibra da secção.

O OpenSees também possui a opção de desenhar gráficos destes parâmetros em função do tempo e ainda de apresentar a estrutura deformando-se durante as análises.

3.1.1.9. Algoritmo

Para a resolução das equações não-lineares usou-se o método iterativo de Newton-Raphson regular, já que em relação aos outros métodos testados, este necessitou de menos iterações para que a convergência fosse atingida, apresentando assim um melhor desempenho.

3.1.2. Refinamento da malha

3.1.2.1. Análises lineares

Um dos factores que influencia bastante qualquer modelação de elementos de casca é o refinamento da malha. Malhas demasiado simples tendem a originar menores deformações e a produzir estados tensão que se afastam de o que acontece na realidade. Por outro lado, embora

malhas mais apertadas forneçam melhores resultados, podem tornar a modelação demasiado pesada a nível computacional, e consequentemente, pouco eficazes.

Hambly (1976) sugere alguns cuidados a ter para que se gere uma malha de vigas que produza resultados satisfatórios, dentro dos quais destacam-se os seguintes:

- Os elementos que compõem a grelha devem ser sempre ortogonais entre si e com espaçamentos idênticos;
- Caso se pretenda estudar o efeito de carregamentos localizados, deve-se considerar um espaçamento menor nessa região;
- Vigas e regiões rígidas têm de ser consideradas como elementos de barra;
- O espaçamento entre os elementos não deve ser superior a $\frac{1}{4}$ do vão.

Um refinamento que produz bons resultados e simultaneamente não prejudica a performance da modelação foi estudado e encontra-se descrito na Secção 4.

3.1.2.2. Análises não lineares

O refinamento para a modelação de quaisquer elementos em análises não lineares merece especial atenção pelo facto de que ao contrário de o que acontece em análises lineares, malhas muito apertadas não originam necessariamente bons resultados. A maioria das ferramentas de cálculo automático para análise de estruturas baseiam-se em formulações de deslocamentos, e nestas formulações, os elementos finitos utilizam uma aproximação do campo de deslocamentos no interior do elemento de barra, a partir da qual se calculam as deformações, tensões e esforços existentes no elemento. Em análises não lineares, a distribuição de fendas, plastificações ou rotura de materiais está directamente relacionada com o tamanho dos elementos finitos. O refinamento ideal da malha é actualmente a forma mais eficaz de limitar o inconveniente do vector deslocamento ser sempre uma aproximação e não um valor exacto (Correia et al., 2007).

De forma a verificar este aspecto, modelou-se uma laje fungiforme e observou-se o seu comportamento quando ensaiada com diferentes refinamentos, e posteriormente, tiraram-se algumas conclusões para que nas secções seguintes fosse possível obter-se valores satisfatórios em análise não lineares. Os resultados deste estudo encontram-se na Secção 4.

3.2. SAP2000

De forma a poder comparar os resultados alcançados usando-se elementos de grelha, com os valores obtidos recorrendo-se a modelações com elementos de casca, construíram-se vários modelos utilizando-se o *software* SAP2000. A escolha deste *software* prendeu-se essencialmente com o facto de permitir a inserção e caracterização de elementos laminares de forma fácil e simples. Segue-se uma breve descrição do procedimento usado para a análise destes elementos.

3.2.1. Unidades e dimensões

O SAP2000 trata-se de uma aplicação com uma grande versatilidade no que diz respeito às unidades. O sistema de unidades escolhido foi o sistema internacional (SI). De seguida procedeu-se à construção dos vários modelos. Optou-se por se aplicar uma grelha definida apenas por 4 vértices, cujas distâncias dependiam das dimensões em planta do elemento que se pretende modelar. Após isto, uniu-se os vértices da grelha, desenhando-se uma área através do comando *Draw Rectangular Area*, disponível no menu *Draw*. A discretização desta área foi feita de forma a obter uma malha que permita resultados satisfatórios e usando-se o comando *Edit Areas/Divide Areas* disponível no menu *Edit*. Por último, define-se o sistema de apoios. Este processo é realizado restringindo-se rotações e/ou translações em alguns nós no caso de apoios pontuais, ou em alinhamentos de nós no caso de apoios lineares. A Figura 42 representa um exemplo da modelação de um elemento de casca usando-se o procedimento anteriormente descrito.

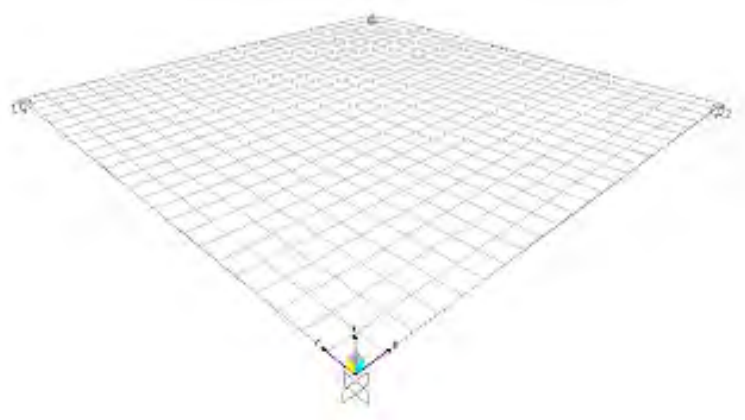


Figura 42. Modelação de uma laje fungiforme usando-se o *software* SAP2000.

3.2.2. Materiais

As propriedades dos materiais, tal como acontece no OpenSees, estão dependentes do tipo de análise que se pretende efectuar. Para as análises lineares elásticas em que apenas é necessário definir o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson foi usado o mesmo processo descrito na Secção 3.1.2.1. Seguidamente introduziu-se estes valores através do comando *Materials*, disponível no menu *Define*. O peso próprio de cada elemento foi simulado através da aplicação de carregamentos e não atribuindo valores ao peso volumétrico, tal como se pode verificar através da Figura 43.

The image shows a 'Material Property Data' dialog box with the following sections and fields:

- General Data:**
 - Material Name and Display Color: Betao (with a yellow color swatch)
 - Material Type: Concrete (dropdown menu)
 - Material Notes: Modify/Show Notes...
- Weight and Mass:**
 - Weight per Unit Volume: 24.0
 - Mass per Unit Volume: 2.4473
- Units:**
 - KN, m, C (dropdown menu)
- Isotropic Property Data:**
 - Modulus of Elasticity, E: 30000000
 - Poisson's Ratio, U: 0.25
 - Coefficient of Thermal Expansion, A: 9.900E-06
 - Shear Modulus, G: 12500000
- Other Properties for Concrete Materials:**
 - Specified Concrete Compressive Strength, f_c: 35000
 - ☐ Lightweight Concrete
 - Shear Strength Reduction Factor: (empty field)
- ☐ Switch To Advanced Property Display
- Buttons: OK, Cancel

Figura 43. Quadro de inserção das propriedades materiais.

3.2.3. Secções

A atribuição de secções no SAP2000 é feita através do comando *Area/Sections*, disponível no menu *Assign*. Neste quadro define-se a espessura do elemento, o material que o compõe e o tipo de solução analítica linear que se pretende que o programa siga. A seguinte figura apresenta as abordagens analíticas disponíveis. A diferença entre cada solução encontra-se descrita na Tabela 1.

Figura 44. Quadro de caracterização da secção do elemento.

Tabela 1. Diferenças entre as abordagens analíticas lineares para elementos de casca

Solução	Considera a distorção devido ao esforço	Considera deformação devido ao efeito de
	cortante?	membrana?
Shell – Thin	Não	Sim
Shell - Thick	Sim	Sim
Plate – Thin	Não	Não
Plate – Thick	Sim	Não

Existe ainda a opção de inserir uma secção composta por várias camadas (*Shell – Layered/Non Linear*). Desta forma, para uma secção de betão armado, é possível descrever o tipo de betão e o reforço metálico aplicado. No entanto, de acordo com Beyer (2008), a construção deste tipo de modelo, exige a aplicação de uma lei constitutiva que descreva o comportamento biaxial do betão, e o manual do SAP2000 não fornece informações precisas sobre este modelo.

3.2.4. Carregamentos

A aplicação de cargas é realizada através do comando *Area Loads/Uniform* (Shell), disponível no menu *Assign*. Este comando distribui as solicitações por toda a área do elemento, pelo que o carregamento deve ser inserido em kip/sft (força por unidade de área). A Figura 45 representa o quadro de introdução de carregamentos.

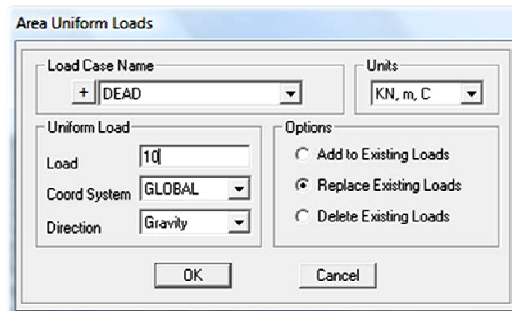


Figura 45. Quadro de caracterização do carregamento.

Após isto, pode-se executar a análise estática e clicando sobre pontos da estrutura deformada, obter-se os respectivos deslocamentos e esforços.

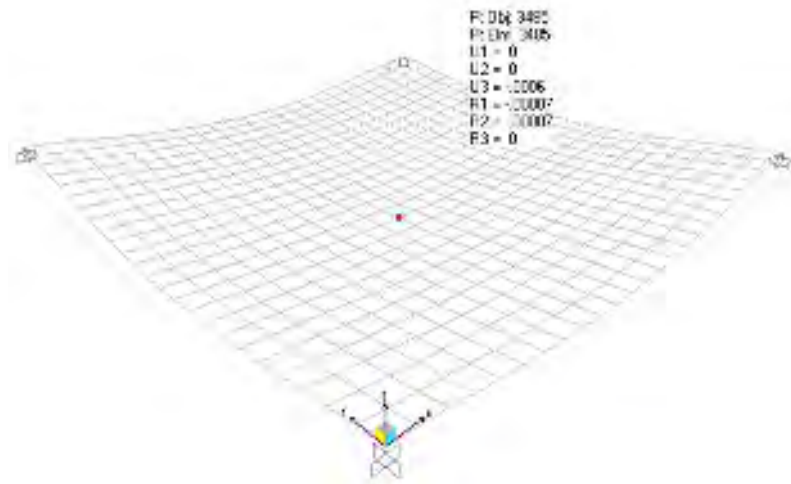


Figura 46. Deformada de um elemento de casca após análise.

4. ESTUDO DO EFEITO DO REFINAMENTO E DA RIGIDEZ À TORÇÃO

4.1. Influência do refinamento

Um dos problemas da modelação de elementos de casca através do método dos elementos finitos está na escolha do espaçamento da malha. Tal como já foi referido, o refinamento influencia a distribuição dos esforços e deformações, pelo que faz todo o sentido que se estude o grau de discretização que se deve aplicar nas modelações, para que se obtenham resultados satisfatórios.

4.1.1. Análises lineares

Nesta secção serão modeladas várias lajes quadradas no OpenSees (recorrendo-se a malha de vigas) e no SAP2000 (recorrendo-se a elementos finitos de casca) com graus de refinamento distintos, que se deformarão apenas no domínio elástico. Os resultados serão posteriormente analisados e serão tiradas conclusões quanto ao refinamento que origina resultados satisfatórios. A Tabela 2 descreve as características das quatro lajes modeladas.

Tabela 2. Caracterização das lajes modeladas para análise linear

Laje	Dimensões em planta (m^2)	h (m)	P_p (kN/m^2)
1	3,0 x 3,0	0,20	4,8
2	4,5 x 4,5	0,25	6,0
3	6,0 x 6,0	0,25	6,0
4	9,0 x 9,0	0,30	7,2

O carregamento que foi aplicado corresponde apenas ao peso próprio da laje admitindo um peso volumétrico (γ_c) de $24\text{ kN}/m^3$. Considerou-se que as lajes estavam simplesmente apoiadas em cada vértice. Os resultados dos refinamentos são apresentados sob a forma de dois gráficos. O primeiro mostra o deslocamento do ponto central da laje, em função da malha escolhida. O segundo, apresenta a variação relativa deste mesmo deslocamento, com a discretização do elemento. O deslocamento relativo foi calculado da seguinte forma:

$$w_{\%} = \frac{w_n - w_{n-1}}{w_n} \times 100 \quad (36)$$

Em que:

w_n - Representa o deslocamento originado pela discretização que se pretende avaliar se produz resultados satisfatórios;

w_{n-1} - Representa o deslocamento obtido usando-se a discretização anterior.

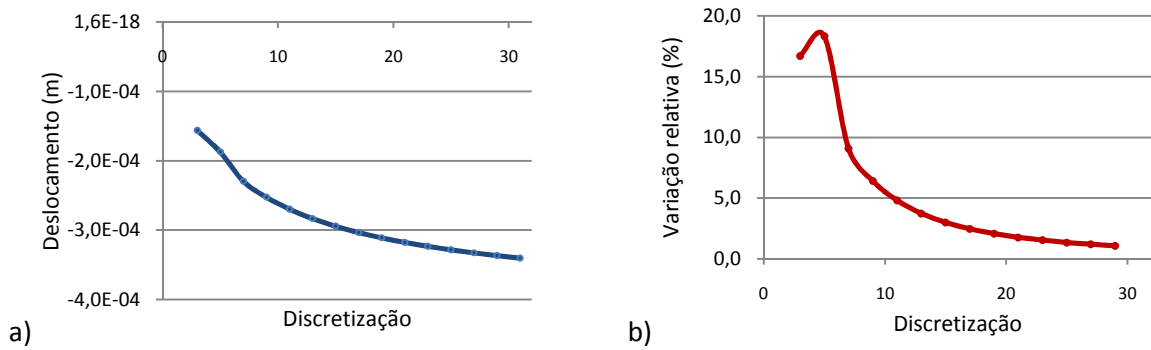


Figura 47. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.

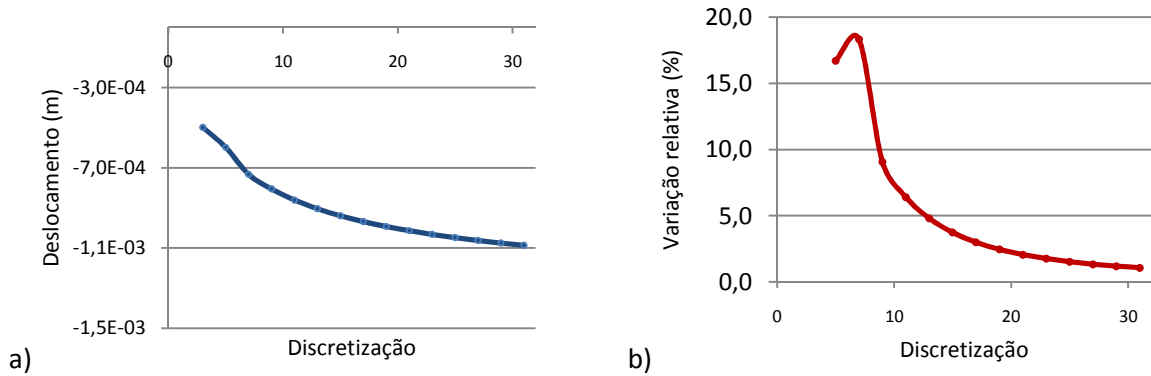


Figura 48. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.

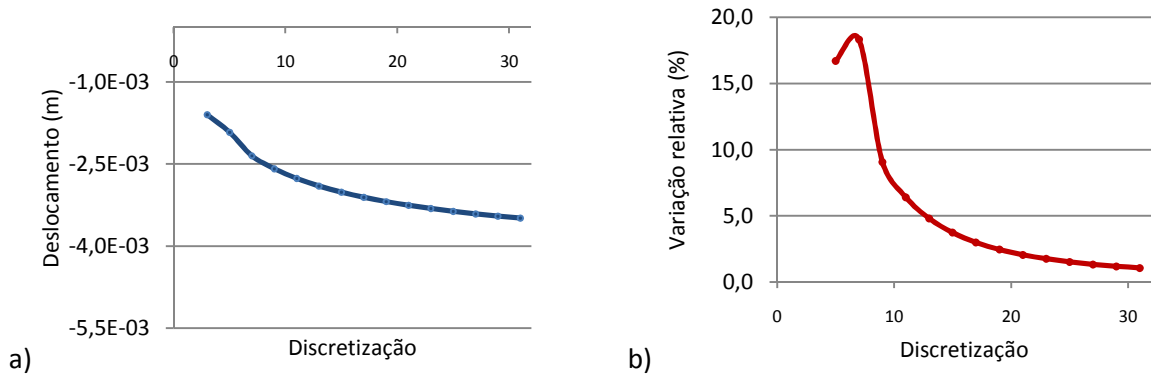


Figura 49. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.

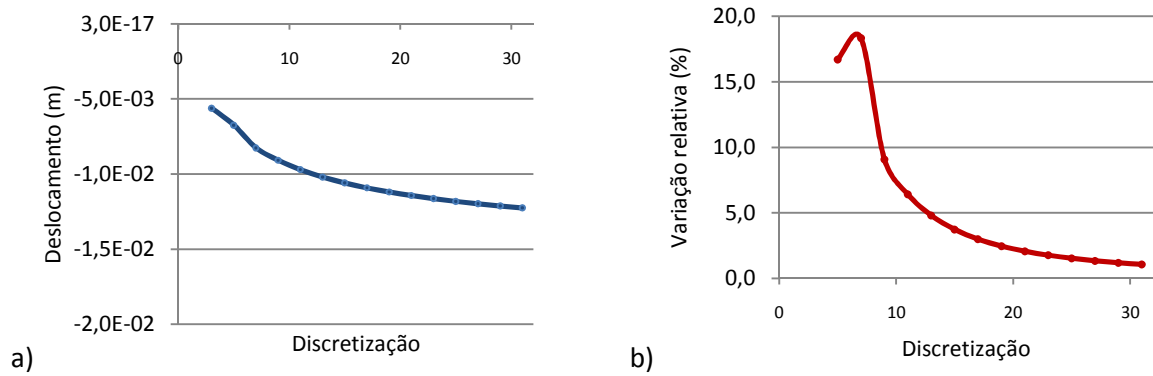


Figura 50. Estudo do refinamento: a) variação absoluta do deslocamento b) variação relativa do deslocamento.

Observa-se que o deslocamento do ponto central das lajes vai aumentando, à medida que o espaçamento da malha vai diminuindo. No entanto, para valores de discretização altos, essas variações começam a diminuir, até que redes mais apertadas não produzem variações significativas, e começam a prejudicar consideravelmente a performance do código. Estabeleceu-se que para que estes resultados pudessem ser comparados, a variação do deslocamento entre duas discretizações consecutivas não poderia ser superior a 1 %. A Figura 51 descreve o espaçamento da malha a partir do qual os resultados são aceitáveis, em função das dimensões em planta da laje.

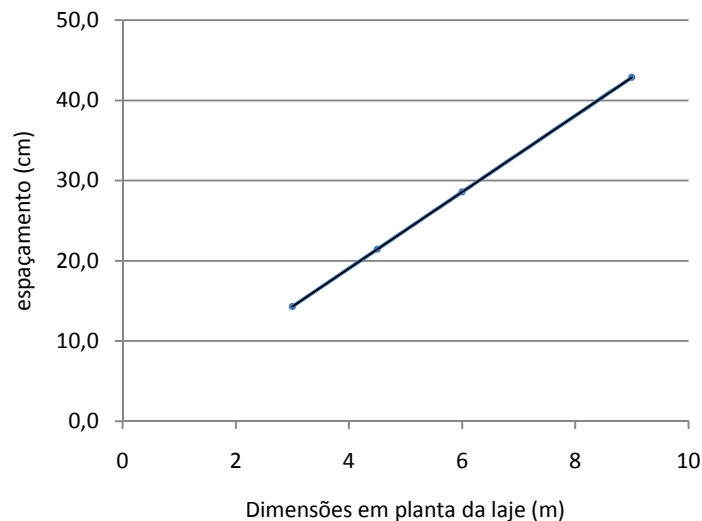


Figura 51. Espaçamento da malha de vigas em função das dimensões em planta da laje

Podemos concluir que a relação entre espaçamento da rede e tamanho da laje é linear. Através destes resultados construiu-se uma equação linear que fornece o espaçamento da malha, sabendo-se as dimensões da laje.

$$\Delta l_x = 0,0476 \times l_y \quad (m) \quad (37)$$

$$\Delta l_y = 0,0476 \times l_x \quad (m) \quad (38)$$

Em que:

$\Delta l_x, \Delta l_y$ – Representam o espaçamento da malha na direcção x e y respectivamente.

Esta equação foi inserida no código construído no OpenSees, e a discretização a ser aplicada para qualquer elemento de placa em regime elástico, produz um espaçamento que é sempre inferior ao dado pela tal expressão.

Um estudo semelhante foi realizado usando-se o *software* SAP2000 e observou-se que para se obter variações relativas inferiores a 1%, não é necessário malhas tão apertadas. A Figura 52 apresenta os espaçamentos necessários, em função das dimensões em planta das lajes.

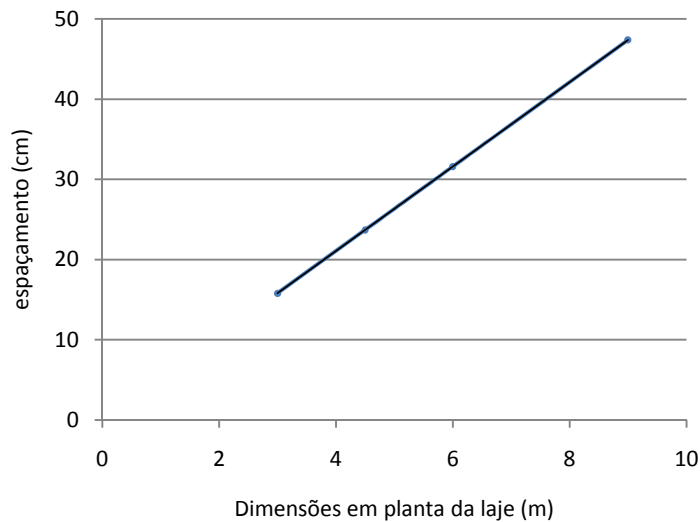


Figura 52. Espaçamento da malha de elementos de casca em função das dimensões em planta da laje

À semelhança de o que foi feito usando-se o *software* OpenSees, também aqui foram construídas expressões que dão o espaçamento mínimo que produz resultados satisfatórios, usando-se os resultados do gráfico acima.

$$\Delta l_x = 0,0526 \times l_y \quad (m) \quad (39)$$

$$\Delta l_y = 0,0526 \times l_x \quad (m) \quad (40)$$

4.1.2. Análises não lineares

Tal como já referido anteriormente, a escolha do refinamento para a modelação de elementos de casca em análises não lineares é mais complexa. Com o objectivo de estudar-se qual o melhor espaçamento a aplicar-se na malha de vigas, foi modelada uma laje fungiforme quadrada, e ensaiada aplicando graus de refinamento distintos. Foram aplicados carregamentos que provocassem a rotura da laje por plastificação das armaduras, permitindo assim que ocorresse deformação não só no domínio elástico como também no plástico. A Tabela 3 descreve as características da lajes modelada.

Tabela 3. Caracterização da laje 5 modelada para análise não linear

Laje	l	h	f_c	ν	f_y	E_s	A_{sx}/A_{sy}
5	4,5 m	0,20 m	35 MPa	0,2	350 MPa	200,0 GPa	Ø12//25

Neste tipo de análises verificou-se que não só os deslocamentos e esforços variavam com o tipo de refinamento, mas também a capacidade resistente, ou seja, observou-se que o carregamento que provocava a rotura da laje não se mantinha constante quando o espaçamento da malha variava. A Figura 53 apresenta os resultados obtidos.

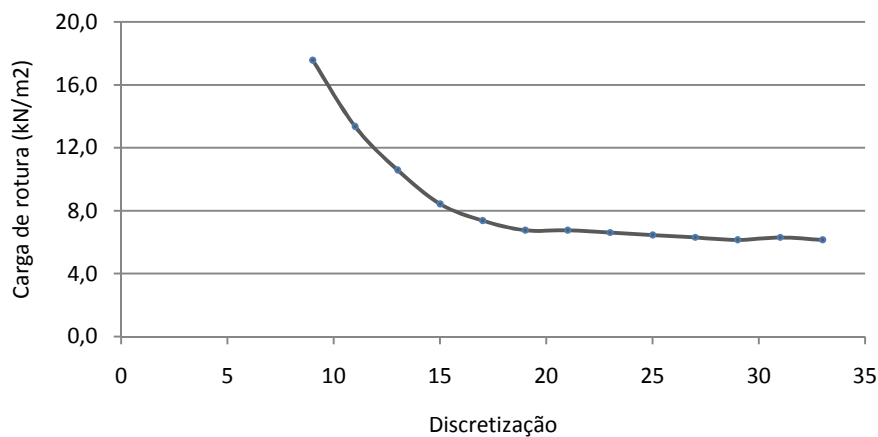


Figura 53. Carga de rotura da laje 5 em função da discretização.

Pode-se constatar que inicialmente existe uma grande variação dos resultados e que para refinamentos baixos, as cargas de rotura obtidas são demasiado altas e irreais. Este comportamento dos resultados faz todo o sentido se entendermos que a distribuição de plastificações dos materiais em malhas pouco apertadas afasta-se bastante do que acontece na realidade. Com refinamentos maiores, é possível aplicar os danos com maior rigor e apenas nas zonas onde estes realmente ocorreriam.

De seguida estudou-se os deslocamentos transversais do ponto central da laje em função da discretização da malha. Como já se observou anteriormente, as cargas de rotura variam com o espaçamento da malha, pelo que optou-se por se medir os deslocamentos para um carregamento constante de $6,0 \text{ kN/m}^2$. A escolha deste valor esteve relacionada com o facto de obrigar a laje a deformar-se para além do regime elástico. Os resultados desde ensaio encontram-se presentes na Figura 54.

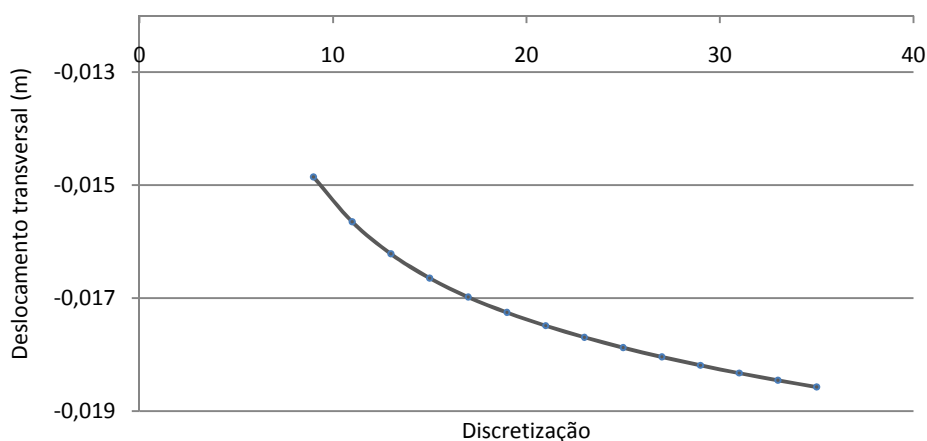


Figura 54. Deslocamentos transversais do nó central da laje 5.

Observa-se que quando se usam malhas pouco apertados os deslocamentos obtidos são mais baixos, e à medida que se vai aumentando o refinamento da modelação, os deslocamentos vão crescendo. No entanto, ao contrário de o que acontecia nas análises lineares, aqui não se verifica uma estabilização dos resultados, ou seja, o aumento dos deslocamentos continua a aumentar acentuadamente.

4.2. Influência da rigidez à torção

Desde que se começou a testar o código construído no OpenSees, observou-se que os parâmetros que mais influenciavam a distribuição dos esforços e deformações eram sem dúvida a rigidez à flexão e torção. Tal como referido anteriormente, podem existir várias abordagens ao cálculo da rigidez de torção pelo que nesta secção, serão apresentados alguns ensaios em lajes rectangulares, usando-se diferentes expressões para o cálculo da rigidez à torção. Posteriormente, estes valores serão comparados com os resultados fornecidos pela solução analítica de Navier. É importante entender que quanto mais se aproximarem os valores dados pela modelação à solução de Navier, melhor será a mesma.

As propriedades geométricas da laje modelada encontram-se representadas na Figura 55, assim como a posição dos pontos que definem as linhas sobre as quais se estudou as deformações transversais e os momentos flectores segundo as duas direcções.

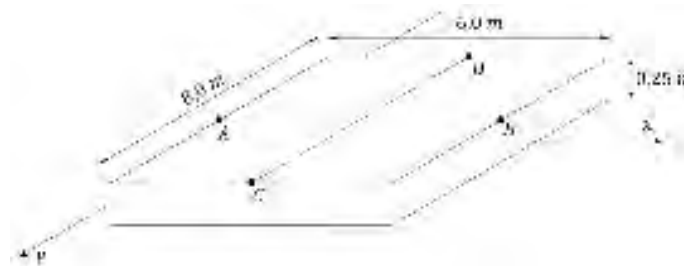


Figura 55. Características da laje modelada no OpenSees.

A esta laje foram adicionados apoios simples ao longo dos quatro bordos e foi-lhe aplicada um carregamento de 10kN/m^2 .

4.2.1. Deslocamentos transversais

Começaremos por estudar a deformação transversal da laje. A Figura 56 apresenta os deslocamentos verticais ao longo da linha AB (ver Figura 55), calculados pela modelação de malha de vigas e pela solução de Navier. Segue-se a nomenclatura estabelecida para as diferentes abordagens ao cálculo da rigidez de torção:

$$\square J_1 = \frac{bh^3}{6} \text{ (de acordo com Hambly, 1976)}$$

$$\square J_2 = \frac{3h^3b^3}{10(h^2+b^2)} \text{ (de acordo com Dória, 2007)}$$

$$\square J_0 = 0 \text{ (considerando inércia de torção nula)}$$

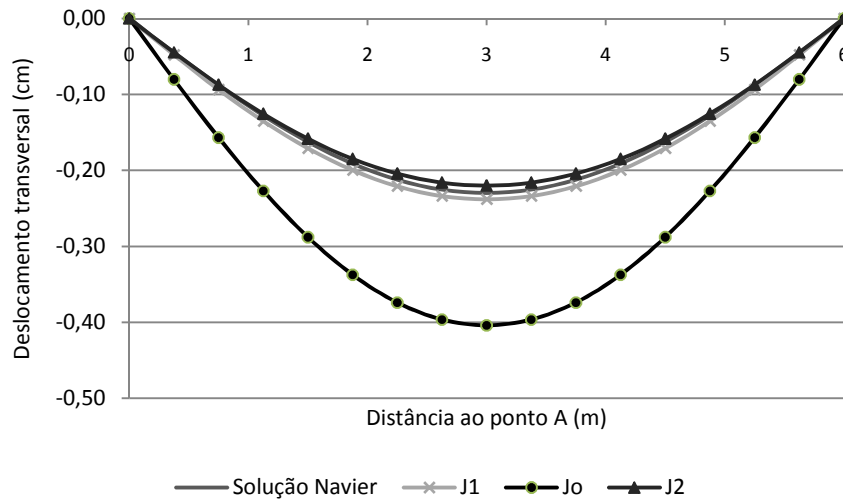


Figura 56. Deslocamentos transversais ao longo da linha AB

Através deste ensaio observa-se claramente que a consideração da rigidez à torção como nula dá origem a deslocamentos bastante superiores à solução exacta. Embora se saiba que se estaria do lado da segurança, esta abordagem é demasiado conservativa e irreal.

A Figura 57 apresenta os deslocamentos transversais ao longo do maior vão da laje (linha CD), considerando apenas as expressões J_1 e J_2 e a solução de Navier.

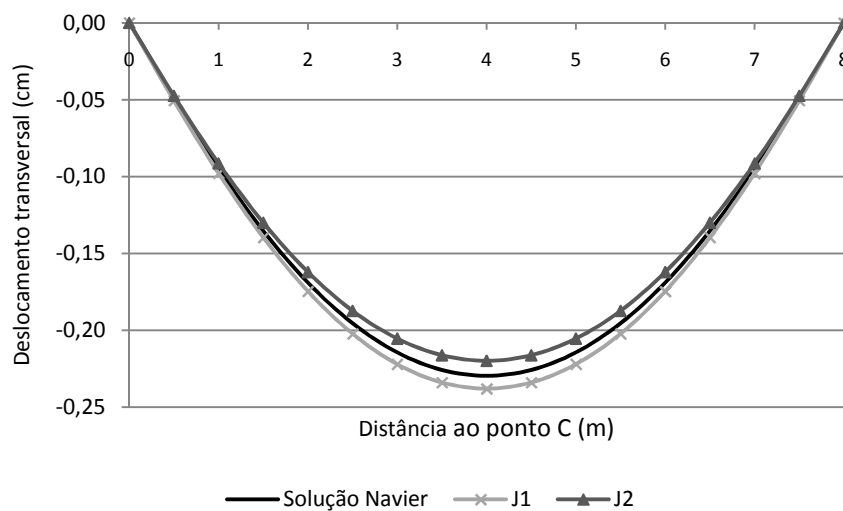


Figura 57. Deslocamentos transversais ao longo da linha CD.

Tanto a expressão J_1 como a J_2 , permitem obter-se valores que se aproximam bastante da solução de Navier, afastando-se no máximo 3,5% e 4,3% respectivamente. A expressão J_1 para além de se aproximar mais da solução exacta, tem a vantagem de fornecer sempre deslocamentos que são superiores aos exactos.

4.2.2. Momentos flectores

À semelhança do que foi feito para o estudo dos deslocamentos transversais, também para os momentos flectores serão usadas várias abordagens ao cálculo da torção, cujos resultados serão posteriormente comparados com a solução de Navier. A Figura 58 apresenta os valores obtidos para os momentos flectores segundo x (m_x) ao longo do menor vão (linha AB). Não foram estudados os momentos flectores ao longo do maior vão devido ao facto das expressões apenas funcionarem para $y = 0$.

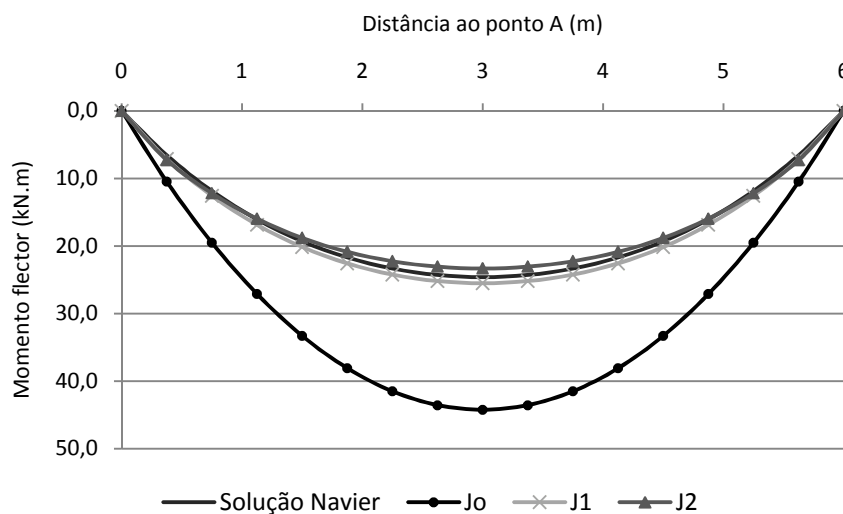


Figura 58. Momentos flectores segundo x ao longo da linha AB

Mais uma vez os valores obtidos considerando a rigidez à torção como nula são demasiado superiores à solução exacta, e consequentemente, irreais. Em contrapartida, tanto a expressão J_1 como a J_2 , permitem que se obtenha valores que se aproximam bastante da solução de Navier, afastando-se no máximo 3,6% e 5,5% respectivamente.

A Figura 59 apresenta os momentos flectores segundo y ao longo do menor vão da laje (linha AB), considerando apenas as expressões J_1 e J_2 e a solução de Navier.

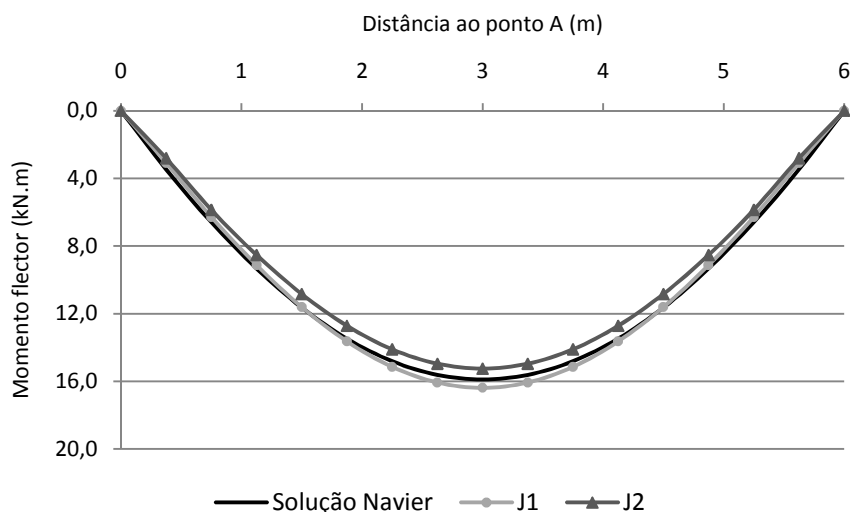


Figura 59. Momentos flectores segundo y ao longo da linha AB.

Mais vez observou-se que a modelação usando-se malha de vigas produz resultados que se aproximam bastante da solução exacta, tendo o erro sido de 3,0 % para a expressão J_1 e de 4,2 % para a expressão J_2 .

4.3. Comentários finais

Com o estudo da influência do refinamento aplicado às modelações foi possível compreender a forma como os resultados vão variando à medida que se altera o grau de discretização da malha. Pôde-se construir expressões que fornecem o espaçamento da malha para o qual se pode afirmar que caso se aplicasse um refinamento mais apertado, a variação dos resultados não seria significativa. É importante que se compreenda que a aplicação de discretizações altas pode fornecer melhores resultados em análises lineares, mas que no entanto, prejudicam bastante a performance computacional, tal como será estudo mais à frente. Por esta razão, deve-se sempre usar malhas que consigam satisfazer estes dois critérios em simultâneo.

No que diz respeito ao que foi estudado para análises não lineares, verifica-se que não só a distribuição de esforços e deformações é afectada pelo refinamento escolhido, como também a própria capacidade resistente da laje. No entanto, verificou-se que ao se aplicar malhas mais apertadas, os resultados para a capacidade resistente começam a estabilizar, podendo-se assim

definir um refinamento a partir do qual não ocorrem variações significativas. Este aspecto não acontece quando se estuda a variação dos deslocamentos, em que se verifica um constante aumento dos mesmos à medida que também se aumenta o grau de discretização. Podemos então afirmar que para análises não lineares, refinamentos apertados não produzem necessariamente bons resultados.

Através dos resultados do estudo da influência da rigidez à torção, pode-se concluir que a análise de elementos de casca em regime elástico usando-se malhas de vigas na sua modelação é bastante viável e apresenta resultados satisfatórios.

Relativamente às três abordagens ao cálculo da rigidez de torção, põe-se completamente fora de questão a atribuição de um valor nulo à rigidez de torção, já que os valores originados afastam-se demasiado da solução exacta. No que diz respeito às outras duas abordagens, pode-se concluir que os valores originados usando-se a expressão J_1 são, de uma forma geral, superiores e mais próximos aos valores exactos dados pela solução de Navier, ao contrário do que acontece usando-se a expressão J_2 em que se obtém sempre valores inferiores e com maior erro. Por esta razão, estabeleceu-se que o cálculo da rigidez de torção ao longo deste trabalho será feito sempre usando-se a expressão J_1 .

Para o cálculo dos deslocamentos transversais e momentos flectores através da solução de Navier, confirmou-se que as séries usadas convergem muito rapidamente, bastando apenas uma iteração para a determinação dos deslocamentos e cerca de três para a determinação dos momentos flectores.

5. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DE OUTRAS FORMULAÇÕES

Nesta secção serão comparados os resultados obtidos através da modelação com malha de vigas, com a modelação usando-se elementos finitos de casca. Inicialmente serão realizadas algumas análises estáticas lineares numa laje fungiforme, de forma a estudar-se as variações de deslocamentos, momentos flectores e esforços transversos entre as duas formulações. Seguidamente, será realizada uma análise não linear a uma laje idêntica com o objectivo de verificar-se se os resultados obtidos estão em concordância com o que seria esperado teoricamente.

5.1. Análise estática linear

Para o estudo das variações dos resultados entre as duas modelações em análises estáticas lineares, foi modelada uma laje fungiforme quadrada, cujas características encontram-se presentes na Tabela 4 e a convenção de eixos na Figura 60.

Tabela 4. Características mecânicas, geométricas e carregamento da laje 1

Laje	l	h	E_c	ν	P_p	S_q
1	4,5 m	0,25 m	27,8 GPa	0,2	6 kN/m ²	2 kN/m ²

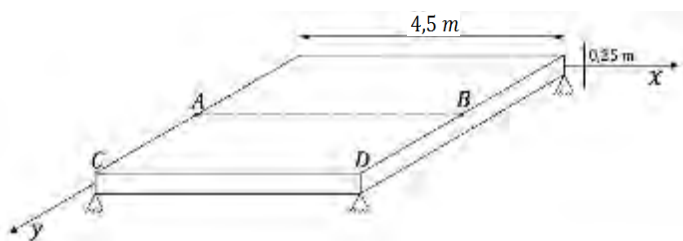


Figura 60. Laje 1: fimensões e orientação dos eixos de referência

As diferenças entre os deslocamentos transversais ao longo do vão central da laje (linha AB), encontram-se presentes na Figura 61.

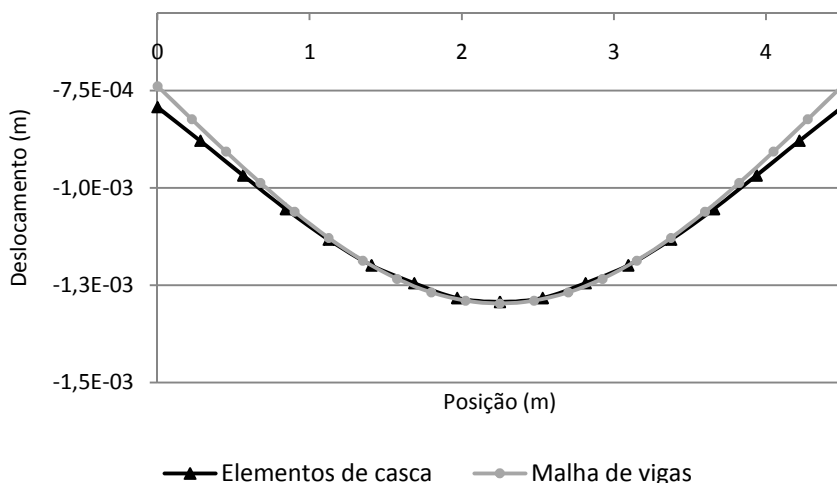


Figura 61. Deslocamentos transversais ao longo do vão médio da laje 1.

- Variação relativa no ponto central: 0,3 %
- Variação relativa máxima: 6,8 %

De uma forma geral, ambas as modelações apresentam valores idênticos, principalmente a meio vão, onde ocorre o deslocamento transversal máximo. De seguida foi estudado a distribuição dos momentos flectores ao longo do vão médio (linha AB), cujos resultados são apresentados na Figura 62. Devido ao facto da laje 1 ser simétrica, a distribuição de momentos na direcção ortogonal será semelhante, pelo que apenas serão apresentados os momentos flectores segundo a direcção x .

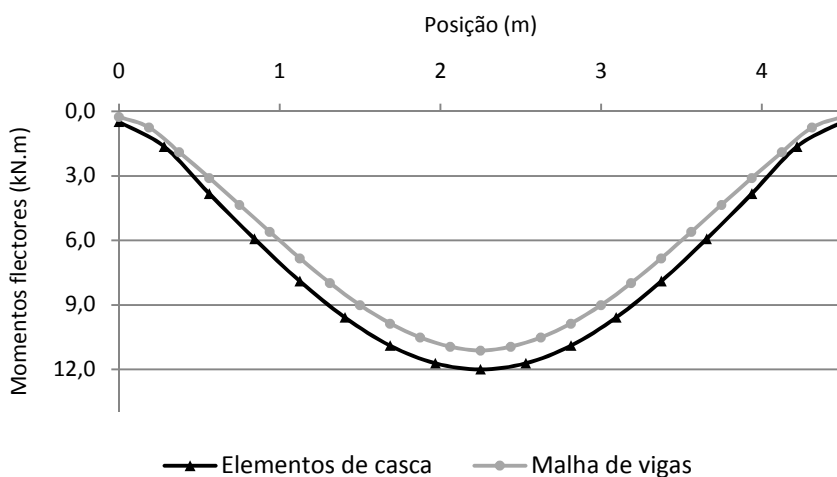


Figura 62. Momentos flectores na direcção x ao longo do vão médio (linha AB) da laje 1.

- Variação relativa no ponto central: 8,7 %
- Variação relativa máxima: 8,7 %

Por observação da Figura 62 podemos concluir que as duas modelações apresentam valores que diferem relativamente pouco, sendo a modelação com elementos de casca a que apresenta valores mais altos ao longo de todo o vão.

Por último, estudou-se a distribuição do esforço transversal ao longo da linha CD. Optou-se por analisar uma zona que abrangesse os apoios, devido ao facto de no vão médio da laje o esforço transversal ser demasiado próximo de zero, não permitindo assim que se obtenha valores satisfatórios. É importante entender que em lajes fungiformes o esforço transversal deve ser verificado tendo em consideração o efeito de punçoamento, e nesta secção, apenas se apresenta o esforço transversal actuante numa faixa de laje, que como será de esperar, será bastante baixo. A Figura 63 apresenta os resultados obtidos usando-se as duas modelações.

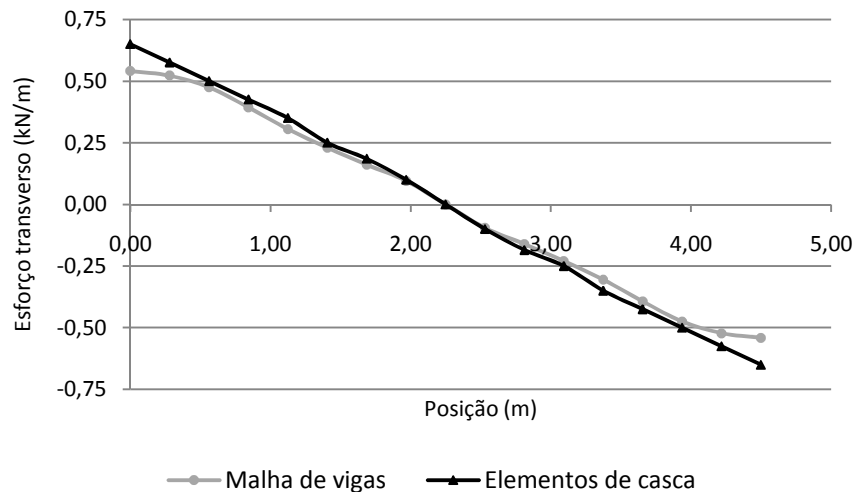


Figura 63. Esforços transversos ao longo da linha CD da laje 1.

- Variação relativa no apoio: 16,1 %
- Variação relativa máxima: 16,1 %

Embora a variação relativa máxima seja alta, ambas as modelações fornecem resultados bastante próximos ao de todo longo do vão, começando apenas a diferir nas zonas próximas dos apoios. Este aspecto deve-se essencialmente ao facto do esforço transversal estabilizar junto aos vértices da laje quando é usada uma malha de vigas para a sua modelação.

5.2. Análise estática não-linear

Para o estudo da análise não linear usando-se a modelação de malha de vigas, modelou-se uma laje fungiforme quadrada, cujo carregamento foi aplicado progressivamente até à sua rotura. Desta forma, foi possível observar a laje a deformar-se inicialmente dentro do domínio elástico, e posteriormente, em regime não linear até ao colapso. Os resultados deste ensaio não puderam ser comparados com a modelação criada no SAP2000 já que mesmo introduzindo uma secção em betão armado e pedindo uma análise não linear, os resultados não estão em concordância com o tipo de análise escolhido. Isto é, os deslocamentos e esforços obtidos, aumentam sempre linearmente com o carregamento, e mesmo aplicando grandes cargas, o programa nunca deixa de convergir, e logo, nunca se alcança a rotura. As características da laje modelada encontram-se presentes na Tabela 5 e a convenção de eixos usada foi a estabelecida na Figura 60.

Tabela 5. Características geométricas, mecânicas e distribuição da armadura da laje 2

Laje	l	h	f_c	f_{ct}	ν	f_y	E_s	A_{sx}/A_{sy}
2	6,0 m	0,2 m	35 MPa	2,2 MPa	0,2	350 MPa	200 GPa	Ø12//15

A Figura 64 apresenta os deslocamentos transversais do ponto central da laje em função do carregamento.

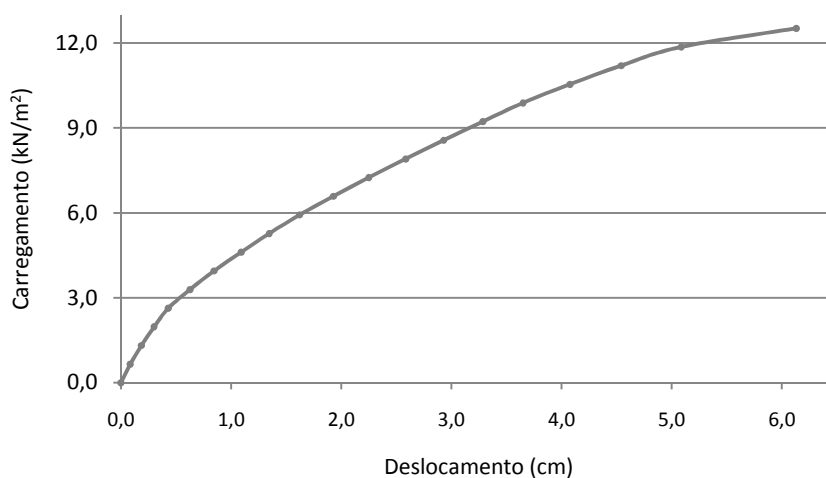


Figura 64. Deslocamentos transversais do ponto central da laje 2.

Ao observar-se a figura acima, podemos distinguir claramente uma fase em que os deslocamentos são proporcionais ao carregamento (fase elástica), e a partir dos 3 kN/m^2 , os deslocamentos começam a aumentar mais rapidamente, deixando de haver uma relação linear entre os deslocamentos e o carregamento (fase de fendilhação). Por último, a partir dos 11 kN/m^2 , o aumento dos deslocamentos dá-se sem que seja necessário aumentar significativamente o carregamento (fase de plastificação), ocorrendo pouco depois a rotura da laje. Podemos então afirmar que os resultados oferecidos pela modelação numérica estão em concordância com o que era esperado teoricamente.

De seguida estudou-se a variação dos momentos flectores segundo a direcção x com a curvatura num dos elementos mais esforçados da laje. Os resultados deste ensaio encontram-se presentes na Figura 65.

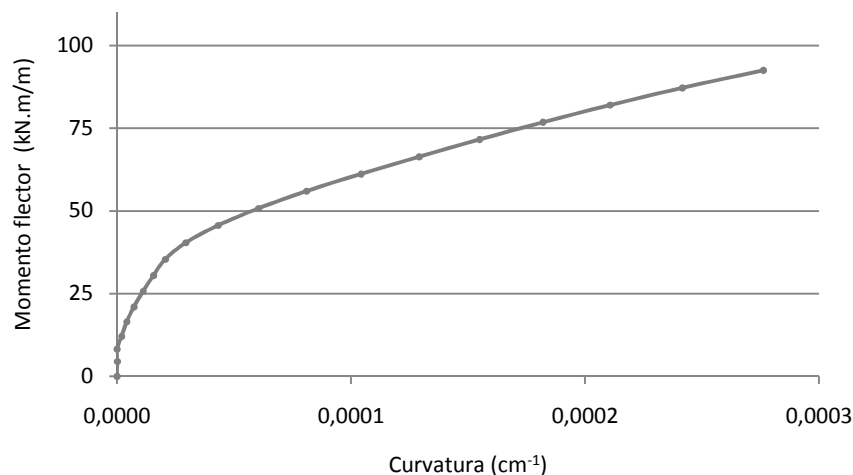


Figura 65. Momentos flectores em função da curvatura numa barra na laje 2.

À semelhança do que foi observado no gráfico deslocamento vs carregamento, também aqui podemos distinguir inicialmente uma fase em que a relação entre momento flector e a curvatura é relativamente linear, e de seguida, inicia-se um aumento mais acentuado da curvatura devido à introdução de danos e plastificações nos materiais, que por sua vez provocam uma diminuição da rigidez à flexão da laje.

5.3. Comentários finais

Com o primeiro estudo numérico foi possível comparar-se os resultados obtidos através do modelo proposto nesta dissertação, com um modelo numérico onde são usados elementos finitos de casca na sua formulação. Pôde-se observar que a distribuição de deslocamentos e momentos flectores foi idêntica, havendo apenas uma ligeira variação na distribuição dos esforços transversos na zona próxima dos apoios.

No segundo estudo em que se pretendia observar a eficácia da introdução de fendilhações e plastificações ao longo do ensaio, verificou-se uma clara redução da rigidez à flexão da laje, que provoca um aumento mais acentuado das deformações à medida que se aumenta o carregamento. Pode-se então afirmar que o modelo numérico recalcula a matriz rigidez da estrutura a cada iteração, permitindo assim o conhecimento do comportamento não linear da mesma.

6. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A melhor forma de se comprovar se uma modelação produz bons resultados, é a confrontação com resultados experimentais. Para que se pudesse testar a modelação com malha de vigas proposta nesta dissertação, usou-se os resultados experimentais de um ensaio realizado em 2003 pela Universidade Federal de Minas Gerais, que teve como principal objectivo o estudo do reforço de lajes através do aumento da secção de betão armado.

6.1. Descrição do ensaio

Pires (2003) testou duas lajes rectangulares com espessura igual a 10 e 15 cm, simplesmente apoiadas em bordos opostos. Ambas as lajes tinham as mesmas dimensões em planta ($1,7 \times 0,6 \text{ m}^2$) e o carregamento foi aplicado ao longo de duas linhas. Segundo a autora do ensaio, a rotura ocorreu devido ao esmagamento do betão na face superior da laje, na zona de aplicação das cargas. Na altura dos testes a idade do betão das lajes era de cerca de 8 anos. A Figura 66 ilustra como foram realizados os ensaios.

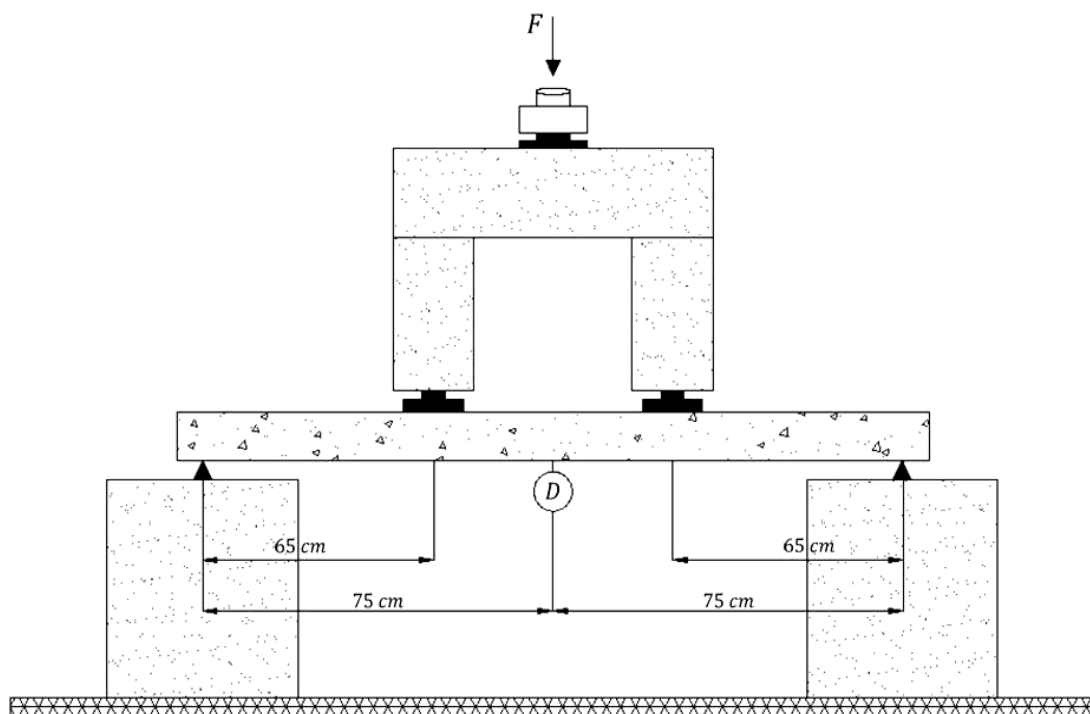


Figura 66. Representação esquemática do ensaio das lajes (adaptado de Bandeira, 2006).

O apoio da esquerda impede os movimentos verticais e horizontais da laje enquanto que o apoio da direita apenas inibe os movimentos segundo a direcção vertical. A meio vão foi instalado um dispositivo para a medição dos deslocamentos verticais à medida que o carregamento ia sendo aplicado. A forma como as lajes foram armadas encontra-se presente na Figura 67.

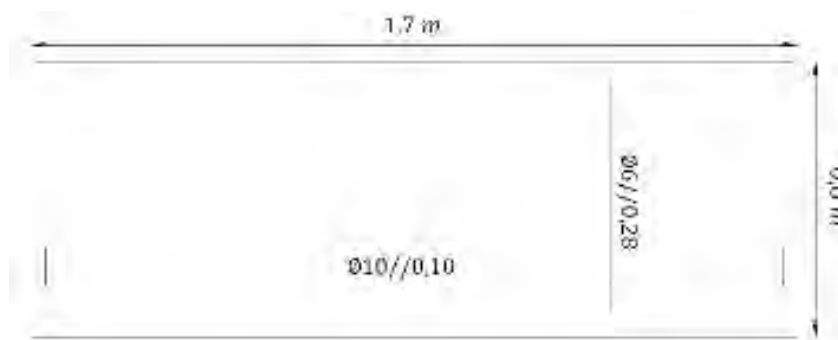


Figura 67. Disposição das armaduras das lajes ensaiadas (adaptado de Bandeira, 2006).

É importante entender que embora o comprimento da laje seja de 1,7 m, a distância a que se encontravam os apoios foi de 1,5 m, pelo que será esta o comprimento a introduzir na modelação.

6.2. Propriedades dos materiais

As características materiais do betão e das armaduras foram determinadas através de ensaios experimentais realizados pela autora. Para o betão foi realizado um ensaio de compressão axial para a determinação da resistência à compressão e módulo de elasticidade longitudinal e um ensaio de compressão diametral para a determinação da resistência à tracção. Para o aço foi realizado um ensaio de tracção axial. Os resultados destes ensaios encontram-se na Tabela 6.

Tabela 6. Propriedades mecânicas dos materiais das lajes 1 e 2.

Laje	f_c (MPa)	E_c (GPa)	f_{ct} (MPa)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (GPa)
1 e 2	37,5	25,9	2,41	682,6	803,0	199,5

Embora seja importante determinar-se experimentalmente as características dos materiais, o fornecimento dos parâmetros acima não é suficiente para a perfeita calibração das leis constitutivas já disponíveis nos *softwares*. Seria interessante conhecer os alongamentos instalados nos materiais quando se atinge a tensão de cedência ou a tensão de rotura. A forma como os materiais transitam do regime elástico para o regime plástico também permite a determinação de parâmetros fundamentais à criação das leis que ditam a relação entre tensões e deformações. O ideal seria ter acesso aos diagramas tensão/deformação criados a partir dos resultados experimentais. A determinação dos parâmetros em falta foi feita por comparação com outros materiais com capacidades resistentes idênticas.

6.3. Apresentação dos resultados

Os resultados dos ensaios de Pires (2003) encontravam-se sob a forma de gráficos, e não em formato digital. Este inconveniente não permitiu a interpretação dos valores com rigor máximo, no entanto, usou-se um *software* denominado por Windig 2.5, que analisa gráficos em formato de imagem, e extrai os valores. A utilização deste *software* é relativamente simples bastando-se carregar a respectiva imagem no programa, e seguir-se com o ponteiro do rato a curva do gráfico. Este processo permite que as coordenadas desta curva sejam guardadas num ficheiro de texto.

Os resultado experimentais do deslocamento do vão central em função do carregamento das lajes de Pires (2003), encontram-se apresentados na Figura 68.

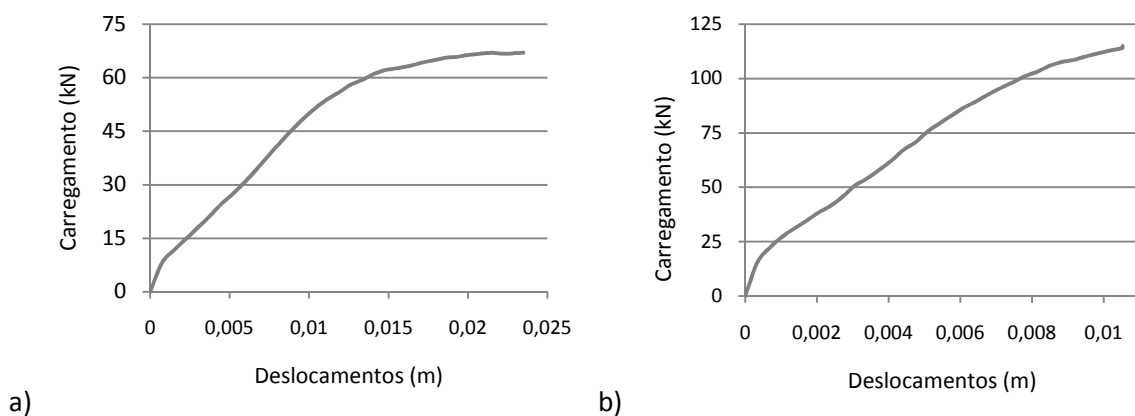


Figura 68. Resultados experimentais: a) laje 1; b) laje 2

Através da observação dos dois gráficos, podemos distinguir uma fase inicial em que os deslocamentos são proporcionais ao carregamento aplicado (fase elástica). De seguida verifica-se um aumento mais acentuado dos deslocamentos mas ainda proporcional às cargas aplicadas (fase de fendilhação). No final do ensaio as deformações transversais aumentam mais rapidamente ocorrendo por fim a rotura das lajes. Este tipo de comportamento no final é característico em lajes quando ocorrem grandes plastificações nos materiais. De forma a comprovar-se esta hipótese foram calculadas as curvas tensão/deformação tanto para o betão, como para o aço em ambas as lajes.

6.3.1. Laje 1 (espessura 10 cm)

A modelação da laje 1 foi feita usando-se uma malha de 7 x 23 divisões e o carregamento foi aplicada em 20 incrementos. A carga de rotura experimental da laje 1 foi de 65,0 kN com um deslocamento de 2,35 cm. A Figura 69 apresenta os valores calculados numericamente e experimentalmente.

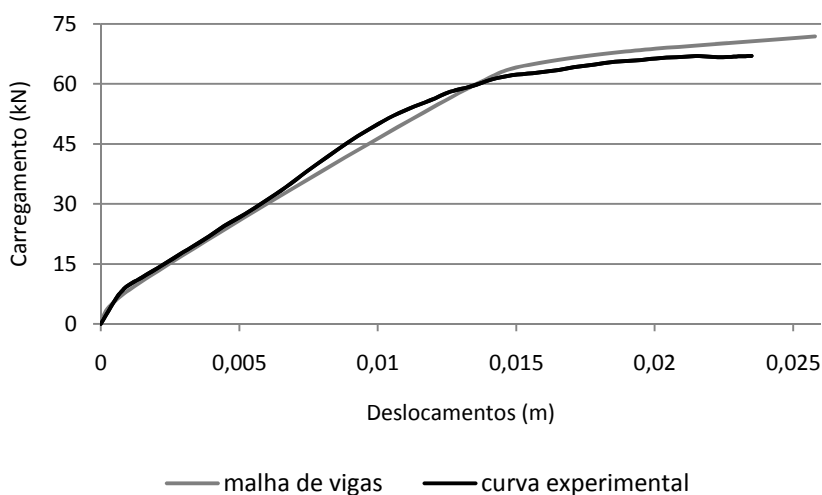


Figura 69. Comparação entre os resultados experimentais e numéricos da laje 1.

- Carga de rotura calculada numericamente: 71,8 kN
- Deslocamento no momento da rotura: 2,58 cm

As diferenças entre os valores obtidos das duas formas são bastante pequenas no início do carregamento, e apenas começam a aumentar no final do ensaio. No final deste capítulo serão descritos alguns aspectos que provocam discrepâncias entre valores numéricos e experimentais.

Tal como referido anteriormente, a variação dos deslocamentos sob carga praticamente constante no final do ensaio experimental sugere uma forte plastificação das armaduras (material dúctil) antes do colapso do betão. De forma a estudar-se esta situação construíram-se diagramas de tensão/deformação para uma fibra de betão sob a linha de aplicação do carregamento, assim como para um varão de aço na mesma zona. A Figura 70 apresenta os resultados para o betão.

Espaço demasiado grande

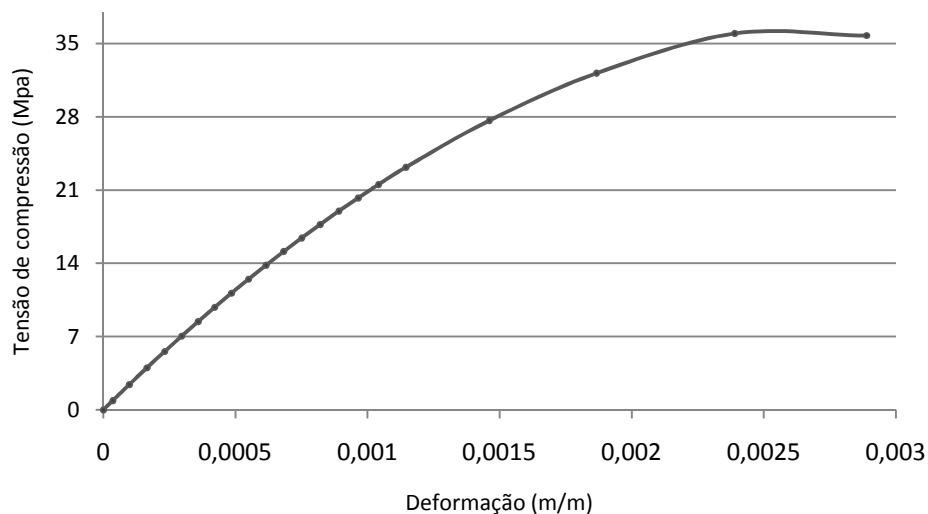


Figura 70. Diagrama tensão/deformação de uma fibra de betão da laje 1.

Ao observar-se o diagrama tensão/deformação do betão pode-se comprovar que realmente a capacidade resistente à compressão do betão é alcançada, provocando assim o esmagamento do mesmo, tal como observado durante o ensaio experimental. De seguida foi construído um diagrama idêntico para um varão de aço sob a linha de aplicação do carregamento, cujos valores encontram-se na Figura 71.

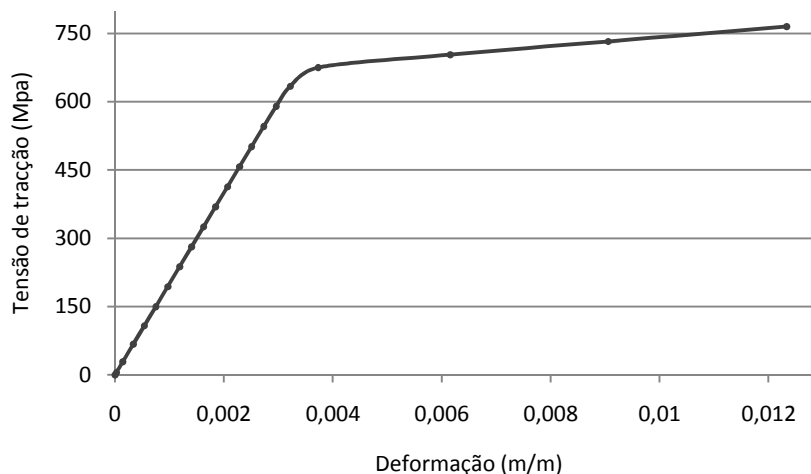


Figura 71. Diagrama tensão/deformação para um varão de aço da laje 1

Tal como se esperava as armaduras de aço deformam-se no domínio plástico mas sem que a tensão de rotura seja alcançada, justificando assim o comportamento da laje na fase final do carregamento.

Com este estudo verificou-se que as variações entre os valores calculados numericamente e experimentalmente foram de 9,5% para a carga de rotura e de 8,9% para o deslocamento no instante da rotura.

6.3.2. Laje 2 (espessura 15 cm)

A modelação da segunda laje foi feita usando-se novamente uma malha de 7 x 23 e um carregamento aplicado em 25 incrementos. A rotura da laje 2 ocorreu para um carga de 118,7 kN com uma flecha de 1,05 cm. Na Figura 72 apresentam-se os valores calculados numericamente e experimentalmente.

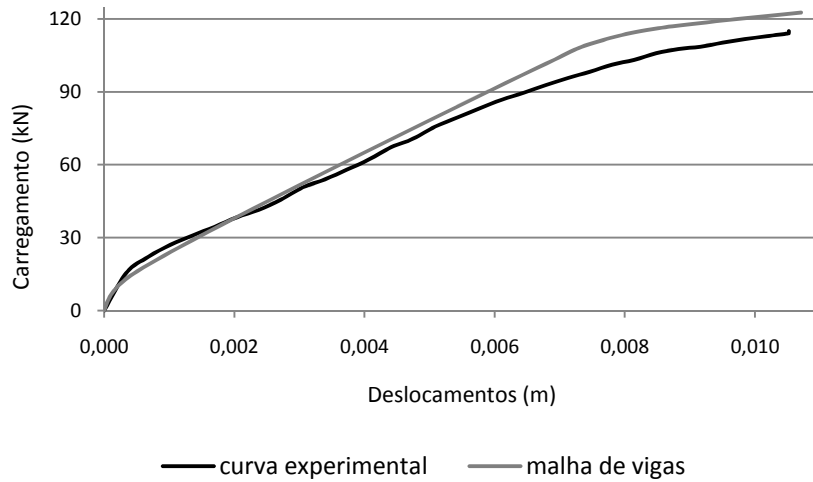


Figura 72. Comparação entre os resultados experimentais e numéricos da laje 2.

- Carga de rotura calculada numericamente: 122,5 kN
- Deslocamento no momento da rotura: 1,07 cm

Mais uma vez observou-se que a modelação proposta oferece melhores resultados enquanto a laje ainda se encontra em fase elástica e de fendilhação, e resultados menos satisfatórios quando se iniciam as plastificações dos materiais. À semelhança de o que foi feito para a laje 1, também aqui se estudou o estado de tensão do betão e do aço nas zonas de aplicação do carregamento. Os resultados para o betão encontram-se na Figura 73.

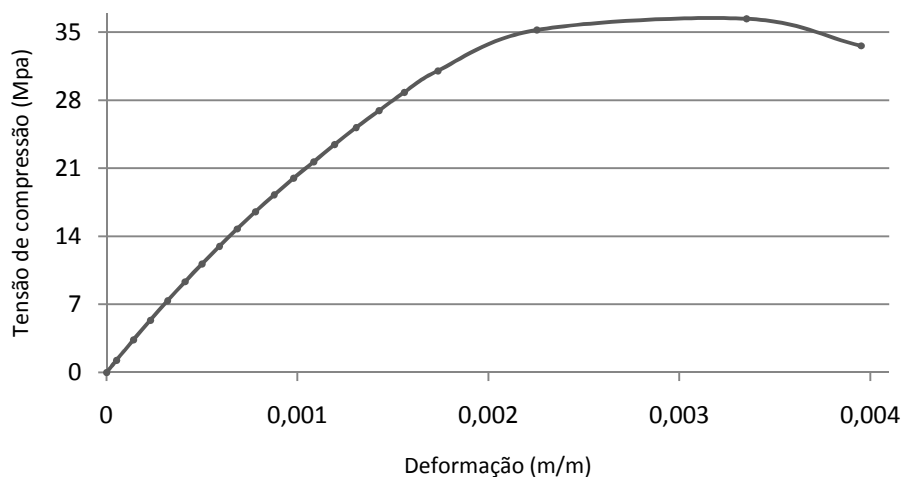


Figura 73. Diagrama tensão/deformação de uma fibra de betão da laje 2.

Verifica-se que a tensão de compressão resistente do betão é atingida provocando assim o colapso da laje 2. A Figura 74 apresenta os valores obtidos para o diagrama tensão/deformação do aço na laje 2.

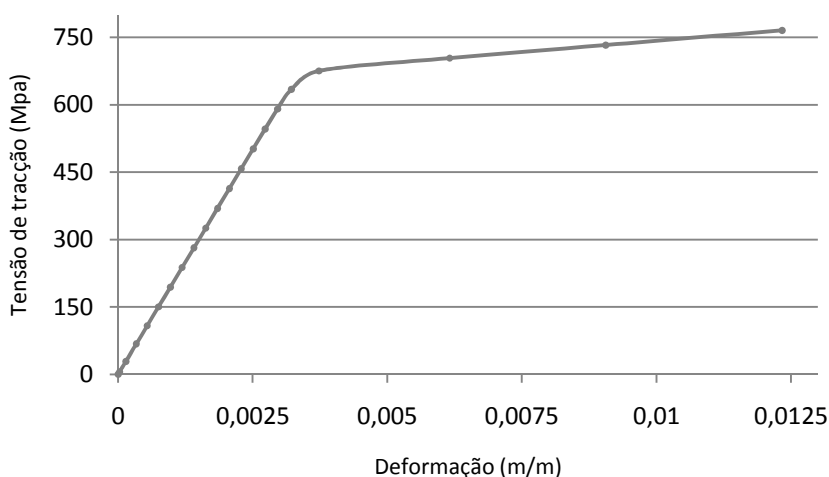


Figura 74. Diagrama tensão/deformação para um varão de aço da laje 2

Mais uma vez observa-se a ocorrência da plastificação das armaduras, justificando-se assim os grandes deslocamentos sob carga quase constante na fase final do ensaio da laje 2.

Com este estudo verificou-se que as variações entre os valores calculados numericamente e experimentalmente foram de 3,0% para a carga de rotura e de 1,9% para o deslocamento no momento da rotura. Pode-se também constatar que a modelação proposta ofereceu melhores resultados para a laje 2 que possuía uma espessura superior, do que para a laje 1.

6.4. Comentários finais

A comparação dos valores obtidos numericamente com os resultados experimentais de Pires (2003), permitiu constatar-se que o modelo numérico proposto representou com um rigor considerável o comportamento não linear de ambas as lajes.

Em Bandeira (2006), são apresentados dois modelos numéricos alternativos para o estudo do comportamento não linear das lajes testadas em Pires (2003). No primeiro modelo, as lajes são modeladas usando-se a abordagem de camadas de elementos finitos de casca, tendo-se alcançado a rotura da laje 1 aos 77 kN com um deslocamento de 2,45 cm e da laje 2 aos 124,5 kN

com um deslocamento de 1,28 cm. Para além de haver uma disparidade considerável entre as cargas de rotura determinadas numericamente e experimentalmente, verificou-se também que a curva carregamento/deslocamento afasta-se significativamente da curva experimental durante todo o ensaio. No segundo modelo, recorre-se a uma formulação com elementos finitos tridimensionais para a modelação das mesmas lajes, tendo-se atingido uma carga de rotura para a laje 1 de 66 kN com um deslocamento de 2,25 cm e para a laje 2, uma carga de 113,5 kN com um deslocamento de 1,25 cm. De uma forma geral, observou-se uma grande semelhança entre as cargas de rotura numéricas e experimentais e a curva carregamento/deslocamento aproxima-se bastante ao que foi observado experimentalmente.

No que diz respeito à modelação com malhas de vigas, pode-se apontar alguns aspectos que provocam a discrepância entre os resultados numéricos e experimentais:

- Tal como já referido anteriormente, a informação disponível sobre as propriedades dos materiais não permitiu o cálculo com rigor de todos os parâmetros necessários à construção das leis constitutivas. Tal como referido por Vicente (2008), o rigor das modelações dependerá da qualidade da informação utilizada, da representatividade do modelo e das acções consideradas. O bom conhecimento dos materiais é fundamental para que se alcancem resultados satisfatórios.
- Relativamente às cargas de colapso calculadas, no modelo numérico admitiu-se que a laje entraria em rotura quando a tensão resistente máxima do betão fosse atingida, já que a autora afirma que ocorre esmagamento do betão. No entanto, não foi encontrada nenhuma informação sobre o critério de paragem do ensaio experimental, para que se pudesse impor a mesma regra no modelo numérico. No trabalho de Park e Ang (1985) estabeleceu como estado limite o valor do deslocamento correspondente a uma perda da capacidade resistente máxima de 20%. Este critério que tem sido bastante usado em ensaios experimentais mais ao que tudo indica, o ensaio de Pires (2003) foi parado quando se observou uma clara degradação do betão junto às zonas de aplicação da carga. Como é de esperar, cada critério de paragem de ensaio irá originar cargas de colapso distintas.
- O mau conhecimento das disposições construtivas pode também originar disparidades entre valores numéricos e experimentais. De forma a comprovar-se este aspecto, decidiu-se fazer variar o recobrimento aplicado nas lajes em cerca de 2 mm, tendo-se alcançado

curvas carregamento/deslocamento relativamente diferentes. Uma variação do recobrimento desta ordem não é difícil de ser cometida, principalmente se pensarmos em estruturas comuns em que não existe o controlo que há nos laboratórios durante a sua execução.

- Por último, de acordo com Ile e Reynouard (2005) por vezes ocorrem variações consideráveis entre os resultados experimentais e numéricos, devido ao facto dos modelos não considerarem efeitos como a degradação excessiva do betão (quebra e desagregação) ou a instabilidade elástica dos varões de aço à compressão. A não consideração destes dois aspectos torna-se ainda mais evidente quando se pretende testar uma estrutura até ao seu colapso. De facto, se observarmos as curvas carregamento/deslocamento numéricas e experimentais de ambas as lajes, podemos constatar que as diferenças apenas começam a ser significativas na fase final do ensaio, onde o grau de dano aumenta consideravelmente.

7. ANÁLISE CÍCLICA NÃO LINEAR

Qualquer estrutura ao longo do seu tempo útil de vida vai sendo solicitada por cargas estáticas, que são caracterizadas por não variarem significativamente ao longo do tempo e por cargas dinâmicas, cuja intensidade, direcção e sentido pode variar com o tempo. O peso próprio da estrutura, sobrecarga de utilização, acção da neve ou presença de equipamentos são exemplos de cargas estáticas, e de uma forma geral, o dimensionamento de estruturas é feito baseado neste tipo de cargas. Por outro lado, temos acções como os sismos, força dos ventos, passagem de veículos ou até mesmo explosões que são exemplos de cargas dinâmicas (Clough e Penzien, 1993). Este último tipo de cargas muitas vezes provoca o colapso das estruturas ou danos bastante graves não só por poderem atingir intensidades consideráveis, mas também por serem capazes de solicitar a estrutura numa direcção para a qual esta não foi dimensionada.

Neste capítulo pretende-se estudar o comportamento de uma parede resistente inserida num determinado edifício (Figura 75), aplicando-lhe carregamentos cíclicos.

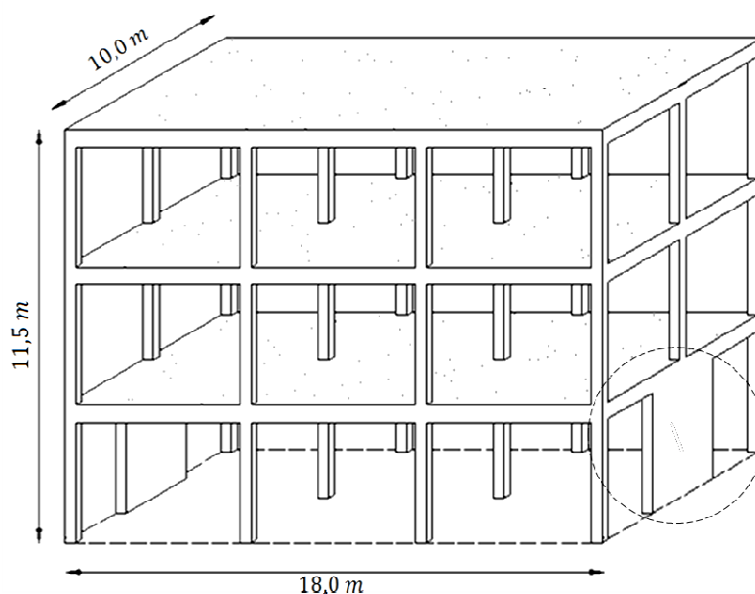


Figura 75. Edifício de três andares com paredes resistentes

O edifício em questão é composto por três andares com três vãos numa direcção e dois vãos na outra direcção. As lajes apoiam em vigas, que por sua vez descarregam em pilares ou em paredes resistentes. Ao nível do primeiro piso existem duas paredes, que serão isoladas do resto da estrutura e analisadas usando-se a modelação de malha de vigas.

É importante referir que este edifício apresenta uma grave irregularidade vertical, já que a presença das duas paredes resistentes conferem uma grande rigidez ao primeiro piso. No caso da ocorrência de um sismo, os pisos superiores poderiam sofrer graves danos devido a esta discrepância na rigidez ao longo da altura do edifício. No entanto, pretendia-se que com este ensaio as paredes resistentes sofressem grandes deslocamentos e rotações, daí a escolha desta tipologia construtiva.

As características geométricas dos elementos estruturais que compõem o edifício foram calculadas no âmbito de um projecto da disciplina “*Structural Concrete*” da licenciatura em engenharia civil da *San Jose State Univeristy, USA* e mostram-se na Tabela 7.

Tabela 7. Características geométricas dos elementos estruturais.

	Pilares	Vigas	Lajes	Paredes resistentes
Secção	$0,25 \times 0,25 \text{ m}^2$	$0,25 \times 0,30 \text{ m}^2$	$0,20 \text{ m}$	$0,25 \times 2,00 \text{ m}^2$

Determinou-se um peso próprio da estrutura de $6,0 \text{ kN/m}^2$ e considerou-se uma sobrecarga de utilização de $2,0 \text{ kN/m}^2$. Quanto ao tipo de condições fronteira, estabeleceu-se que as fundações garantiam um encastramento perfeito tanto dos pilares como das paredes resistentes ao solo.

O isolamento dos elementos estruturais que se pretendem estudar oferece algumas vantagens, tais como uma maior rapidez na resolução do código, um controlo dos parâmetros envolvidos mais simples e uma maior facilidade de obtenção de resultado, já que o número de elementos necessários à modelação baixa consideravelmente. Em contra partida, para que seja possível a extracção de uma das paredes resistentes, é necessário determinar as condições fronteira que a estrutura impõe no topo da parede, assim como as respectivas forças e momentos.

7.1. Simulação dos apoios elásticos

Sendo a estrutura duplamente simétrica, optou-se por se modelar unicamente a parede resistente da direita. Criou-se então uma malha de vigas com um refinamento de 7x10 divisões, e restringiu-se os movimentos de translação e rotação em todas as direcções nos nós da extremidade inferior da parede resistente. A Figura 76 indica a convenção de eixos escolhida, e a

nomenclatura estabelecida para os nós pertencentes ao topo da parede. O tipo de apoios que serão estabelecidos nestes nós da parede mereceu especial atenção, pelo facto da sua determinação não ser directa. Considerar que estes nós não têm quaisquer restrições quanto aos graus de liberdade, ou por outro lado, considerar que são encastrados em todas as direcções, são alternativas que não estão em concordância com a forma como a estrutura se deforma. Dado isto, faz todo o sentido introduzir apoios elásticos com características que simulem correctamente a influência da estrutura na parede resistente.

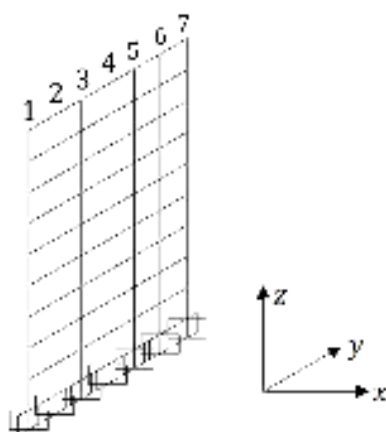


Figura 76. Parede resistente modelada através da malha de vigas.

Tendo em consideração que nesta análise pretende-se solicitar a parede segundo a direcção x , começou-se por determinar a rigidez à translação nesta direcção e de rotação em torno do eixo y . Inicialmente pensou-se em determinar as respectivas constantes elásticas e aplicar apoios elásticos com os respectivos resultados aos nós do topo, no entanto, o OpenSees não possui esta opção. O comando que estabelece as condições fronteira dos nós ou restringe completamente o movimento na direcção pretendida, ou liberta o nó completamente, não existindo uma situação intermédia. Por esta razão, decidiu-se introduzir uma barra elástica por cada nó com características geométricas e materiais que simulassem o efeito de um apoio elástico. Para o cálculo dessas características optou-se pelo método dos deslocamentos já que se trata de uma estrutura com um grau de hiperestaticidade alta. Considerando-se o efeito da sobreposição dos efeitos, segue-se a equivalência estrutural estabelecida para a construção da matriz rigidez.

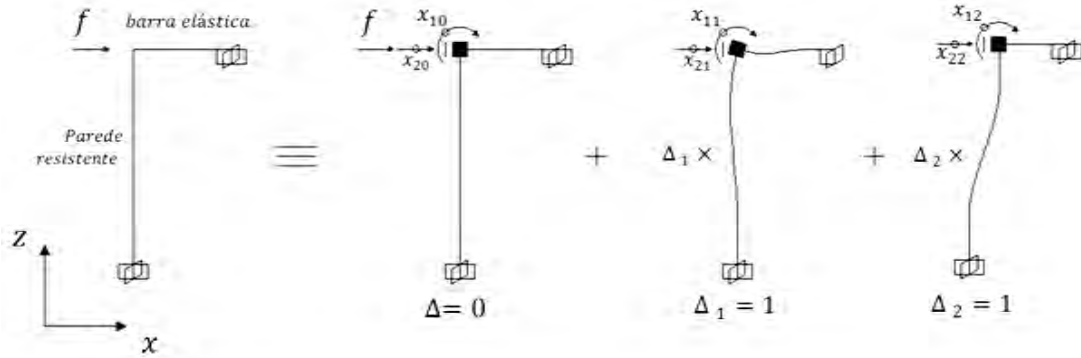


Figura 77. Equivalência estrutural do conjunto parede resistente mais barra elástica.

A matriz rigidez (K) foi determinada tendo em conta os valores das forças e momentos de fixação para barras com secção constante presentes em Gere e Timoshenko (1990). De forma a apenas se ter duas incógnitas, arbitrou-se o módulo de elasticidade longitudinal (E_{be}) e o comprimento (l_{be}) das barras elásticas, ficando-se assim com a área (A_{be}) e o momento de inércia (I_{be}) por se determinar.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4E_p I_p}{l_p} + \frac{4E_{be} I_{be}}{l_{be}} & -\frac{6E_p I_p}{l_p^2} \\ -\frac{6E_p I_p}{l_p^2} & \frac{12E_p I_p}{l_p^3} + \frac{E_{be} A_{be}}{l_{be}} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Em que:

l_p = altura da parede resistente;

I_p = momento de inércia da parede resistente em torno do eixo y;

E_p = módulo de elasticidade longitudinal da parede resistente.

A resolução das equações de equilíbrio foi feita de acordo com o descrito em Arêde e Delgado (2000). A relação entre matriz rigidez (K), vector deslocamentos (d) e vector solicitação (f) é dada pela seguinte expressão:

$$K \times d = f \quad (42)$$

Dado isto, faltava apenas determinar um vector solicitação e respectivo vector deslocamento. Para tal, modelou-se toda a estrutura no SAP2000 e realizou-se um ensaio em que

se aplicou cargas pontuais com intensidades iguais nos sete nós pertencentes ao topo da parede resistente. A Figura 78 apresenta a deformada da estrutura após este ensaio.

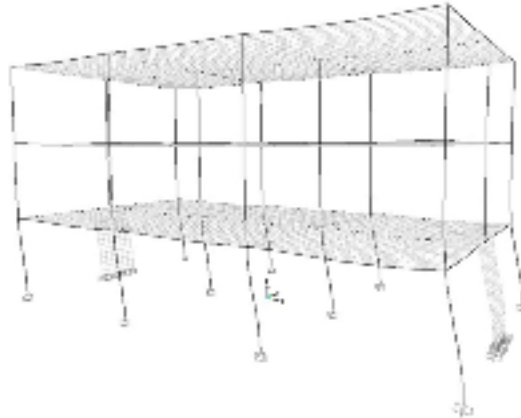


Figura 78. Deformada do edifício quando solicitado horizontalmente.

O deslocamento transversal na direcção x e rotação em torno do eixo y do topo da parede foram extraídos directamente do SAP2000, e através da resolução da expressão (42), obteve-se as restantes características geométricas da barra elástica. Para um comprimento $l_{be} = 1,0 \text{ m}$ e um módulo de elasticidade longitudinal $E_{be} = 3,0 \text{ GPa}$, obteve-se uma área $A_{be} = 0,0096 \text{ m}^2$ e um momento de inércia $I_{be} = 0,013858 \text{ m}^4$. Posteriormente, o módulo de elasticidade longitudinal foi reduzido, para que a rigidez desta barra elástica fosse distribuída de forma igual pelas sete barras que se ligam aos diferentes nós. Após a introdução destas barras na modelação da parede resistente no OpenSees, realizaram-se alguns ensaios em que se aplicaram cargas nos nós do topo, e observou-se se as deformações originadas estavam em concordância com os valores obtidos aplicando-se um carregamento similar na modelação com toda a estrutura no SAP2000. Para que as barras elásticas funcionassem de forma igual quer estivessem a ser traccionadas ou comprimidas, ordenou-se ao programa que não considerasse deformações devido a instabilidade elástica (carga crítica de Euler) ou momentos de segunda ordem.

7.2. Cálculo dos esforços

Para a determinação das forças e momentos que solicitam as paredes resistentes, usou-se o modelo já inserido no SAP2000, e retirou-se os esforços directamente através do uso da opção *Show Tables*. A Tabela 8 apresenta as forças e momentos determinados para cada nó no topo da parede resistente. A convenção de eixos é semelhante à representada na Figura 76.

Tabela 8. Forças e momentos actuantes no topo da parede resistente.

Nó	F_x (kN)	F_y (kN)	F_z (kN)	M_x (kN.m)	M_y (kN.m)	M_z (kN.m)
1	-1,8	5,5	-38,3	2,0	-27,3	-4,4
2	-3,7	3,8	-65,1	0,4	-25,3	-3,7
3	-3,6	2,6	-62,9	0,2	-21,8	-3,3
4	-3,6	0,0	-62,8	0,0	-15,4	-2,4
5	-3,6	-2,6	-62,9	-0,2	-21,8	-3,3
6	-3,7	-3,8	-65,1	-0,4	-25,3	-3,7
7	-1,8	-5,5	-38,3	-2,0	-27,3	-4,4

Estes esforços foram inseridos na modelação criada no OpenSees, e de seguida foi realizado o dimensionamento de tal forma que o eventual colapso da parede resistente seria devido à falha da armadura e não devido ao esmagamento do betão. A Figura 79 apresenta como foi distribuída a armadura.

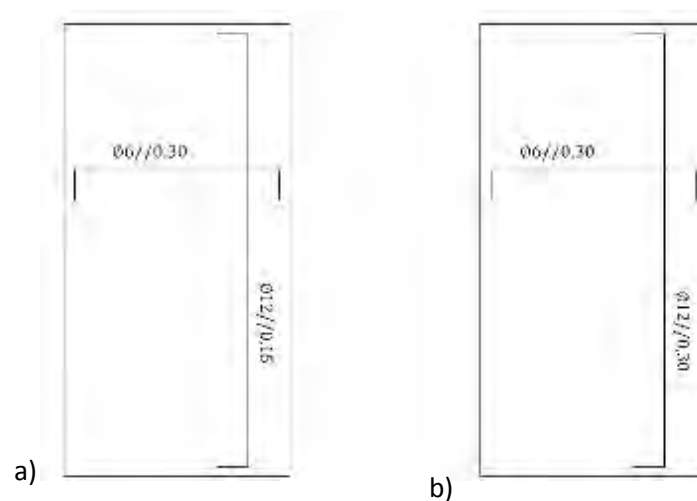


Figura 79. Disposição da armadura na parede resistente: a) na face interior; b) na face exterior

As propriedades dos materiais usados nesta análise encontram-se presentes na Tabela 9.

Tabela 9. Propriedades materiais da parede resistente.

Parede	f_c	f_{ct}	E_c	f_y	f_u	E_s
1	35 MPa	2,2 MPa	28 GPa	275 MPa	310 MPa	200 GPa

Neste capítulo serão realizados dois ensaios. No primeiro, serão aplicados deslocamentos sempre no mesmo sentido até à rotura da parede. De seguida, serão aplicados uma série de deslocamentos com uma sequência pré-definida, que obrigará a estrutura a deformar-se perpendicularmente ao seu plano em ambos os sentidos, simulando assim uma possível situação de sismo real.

7.3. Estudo numérico 1 – Carregamento monotónico

Com vista a estudar a capacidade resistente deste elemento estrutural, aplicou-se uma série de deslocamentos à cota da laje do primeiro andar sempre com o mesmo sentido, até à sua rotura. Para que fosse possível acompanhar-se correctamente o comportamento não linear da parede resistente, decidiu-se aplicar-se incrementos baixos (2 mm). Os deslocamentos foram aplicados no sentido face exterior → face interior da parede, ou seja, do exterior para o centro do edifício. A Figura 80 apresenta a carga que foi necessária aplicar para que se alcançasse um deslocamento do topo da parede de 2 mm para cada iteração.

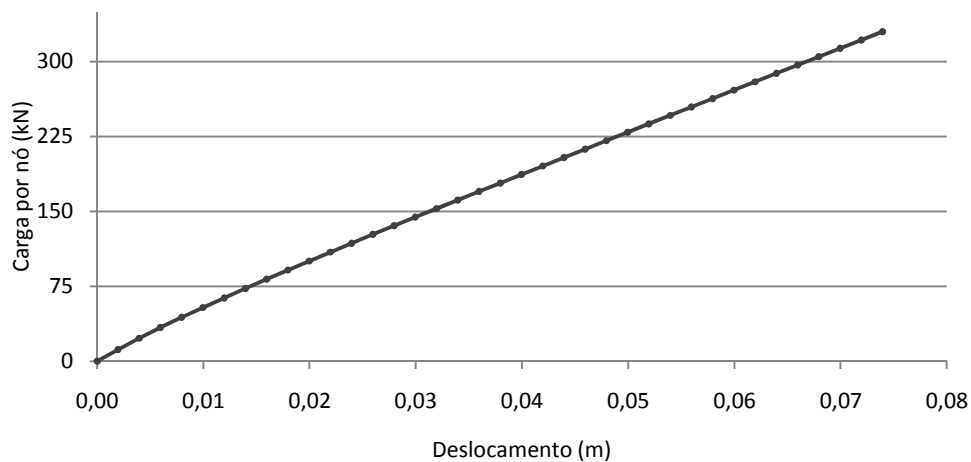
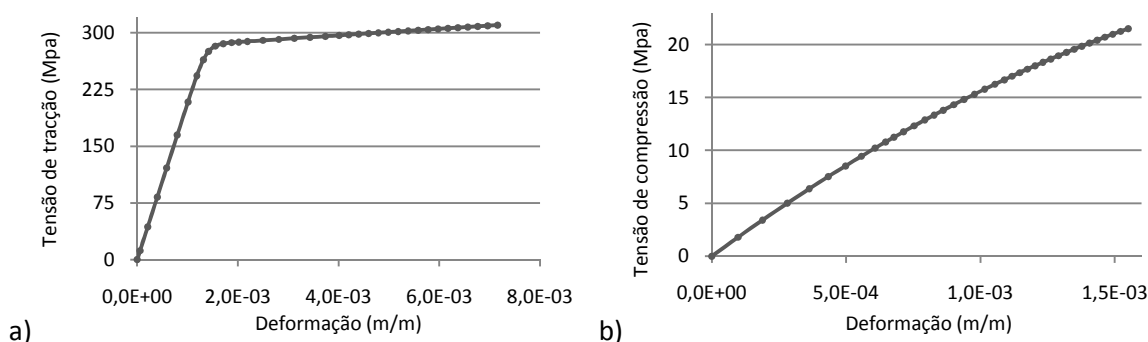


Figura 80. Carga por nó em função do deslocamento imposto no topo da parede resistente.

Embora não seja muito perceptível, ocorre uma diminuição da rigidez da parede ao longo do ensaio, que provoca uma redução na intensidade das cargas que foram necessárias aplicar para que se alcançasse o deslocamento pretendido. Ao contrário do que foi observado quando se estudou o comportamento de lajes quando carregadas até à sua rotura, neste ensaio não se atinge a situação em que os deslocamentos evoluem sem que praticamente seja necessário aumentar o carregamento. Este aspecto deve-se essencialmente devido à presença das barras

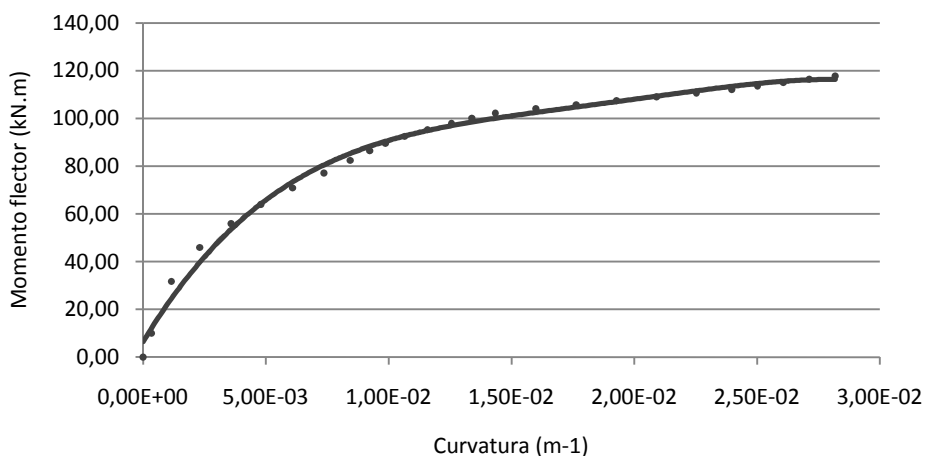
elásticas, que continuam a “absorver” as forças aplicadas, mesmo que a parede perca grande parte da sua rigidez à flexão.

De seguida analisou-se a possível causa de colapso da parede resistente. Para tal, começou-se por se analisar a distribuição de tensões tanto no betão como no aço ao longo de todos os elementos. Como é de esperar, constatou-se que os elementos mais esforçados encontram-se ao nível da base, onde foi aplicado o encastramento. Dado isto, determinou-se os diagramas tensão/deformação de uma fibra de betão na zona comprimida e de uma fibra de aço na zona traccionada. Os respectivos resultados encontram-se presentes na Figura 81.



Pode-se concluir que o colapso da parede resistente ocorre devido à rotura das armaduras na zona traccionada, já que a sua tensão de rotura é ultrapassada. As tensões de compressão do betão e da armadura na zona de compressão, também foram verificadas, tendo-se concluído que a capacidade resistente não é alcançada.

Por último, analisou-se a evolução da curvatura num elemento da base em função do momento flector, cujos resultados encontram-se presentes na Figura 82.



Quanto à relação momento flector/curvatura no elemento pertencente à base da parede resistente, observa-se que ocorre uma clara perda da rigidez no início do ensaio. A partir deste instante, a curvatura evolui sem ser necessário um grande aumento dos momentos flectores.

7.4. Ensaio numérico 2 – Carregamento cíclico

Neste ensaio, serão aplicados deslocamentos cíclicos em ambos os sentidos da parede resistentes até à sua rotura. Começou-se por se definir os vários níveis de deslocamentos que seriam impostos no topo da parede em cada etapa do carregamento. Estes valores foram determinados tendo em conta a altura total da parede e para cada nível de deslocamento foram aplicados três ciclos de carga/descarga. O uso de vários ciclos para a mesma amplitude de deslocamento permite reproduzir a eventual perda de resistência com maior rigor.

A Figura 83 apresenta os deslocamentos impostos na parede para que se execute um ciclo completo de deslocamentos.

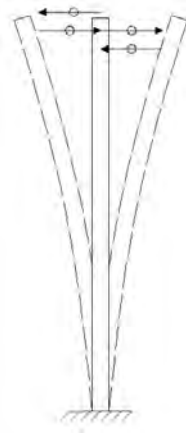


Figura 83. Representação de um ciclo completo de deslocamentos impostos.

Os quatro deslocamentos que é necessário aplicar para que se complete um ciclo, foram por sua vez divididos em incrementos mais pequenos, para que fosse possível seguir-se com maior exactidão o comportamento não linear da parede.

A Tabela 10 apresenta os deslocamentos aplicados em cada etapa do ensaio.

Tabela 10. Sequência de deslocamentos máximos impostos no estudo numérico 2.

Etapa do carregamento	<u>deslocamento</u> altura da parede	Deslocamento total (mm)	Incremento aplicado (mm)
1ª	0,10 %	3,50	1,75
2ª	0,25 %	8,75	1,75
3ª	0,50 %	17,5	3,50
4ª	1,00 %	35,0	3,50
5ª	2,00 %	70,0	5,00

Nesta análise começou-se por se determinar as cargas que foram necessárias aplicar em cada nó para que se atingisse o deslocamento pretendido. Esta fase do ensaio mereceu especial atenção pelo facto de ser comum ocorrerem erros numéricos, tais como o mau seguimento dos ciclos de deslocamentos ou o registo incorrecto das tensões actuaes nos materiais. De forma a evitar-se este inconveniente, verificou-se o sentido de cada incremento de deslocamento, através da apresentação de gráficos tempo/deslocamento em tempo real.

A Figura 84 apresenta a relação entre cargas e deslocamentos ao longo das cinco etapas do ensaio numérico.

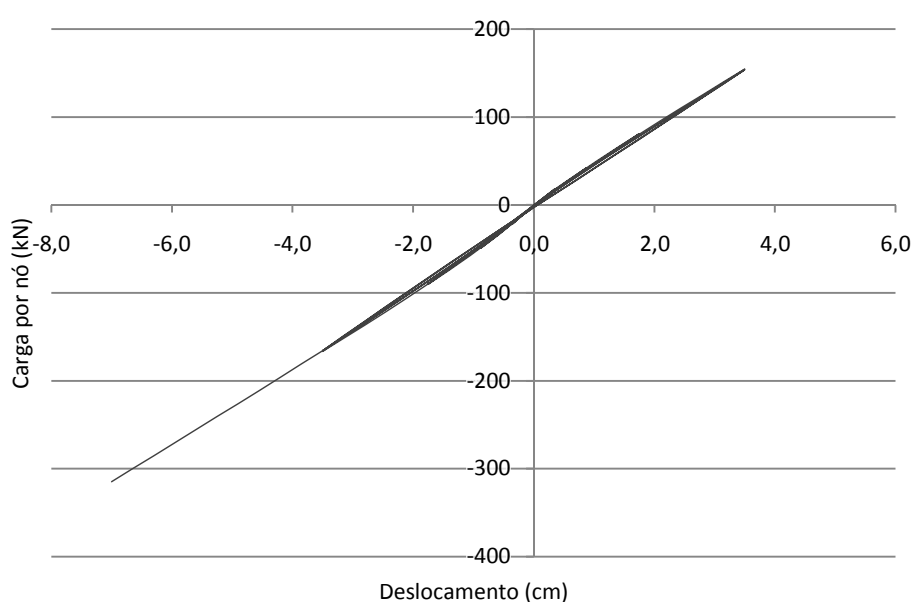


Figura 84. Carga por nó em função do deslocamento imposto no topo da parede resistente.

Através da observação da figura acima, podemos constatar que existem oscilações entre a relação cargas/deslocamento, que significam perdas de rigidez à flexão provocadas pela introdução de danos e plastificações durante o ensaio tal como era esperado. Mais uma vez, não se observa uma diminuição das cargas que foram necessárias aplicar, para que se atingisse o deslocamento pretendido na fase final do ensaio. Este comportamento pode ser justificado pela presença das barras elásticas tal como já referido no primeiro ensaio.

De seguida, estudou-se a evolução da curvatura em função do momento flector num dos elementos mais esforçados, que se localiza na base da parede resistente onde foi aplicado o encastramento. A Figura 85 apresenta os resultados deste estudo e de forma a melhorar a compreensão deste gráfico, os valores encontram-se divididos por etapa de carregamento.

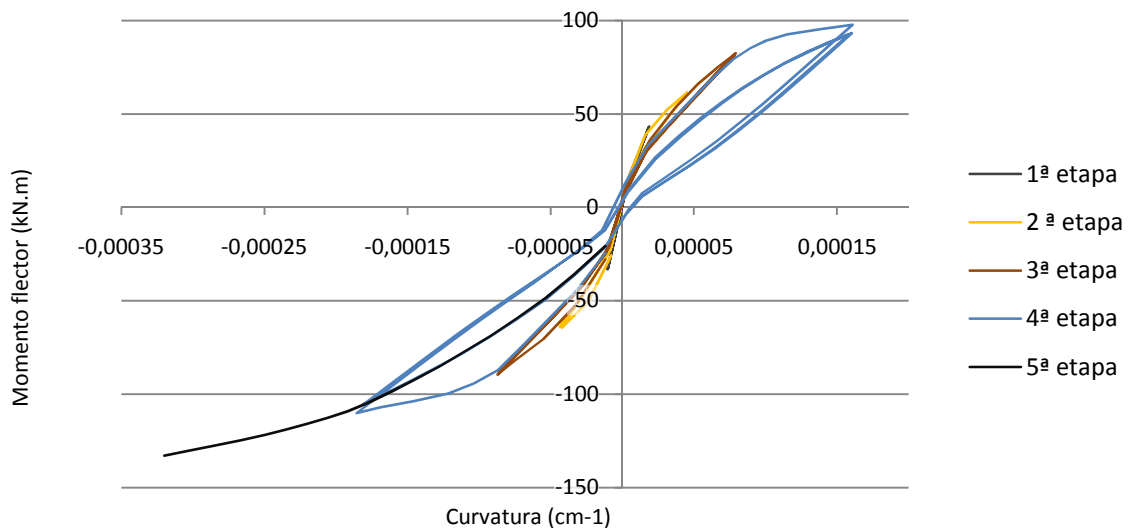


Figura 85. Diagrama momento flector/curvatura num elemento da base.

Pode-se observar que a evolução da curvatura do elemento na primeira etapa praticamente pode ser definida por uma linha, e os resultados dos três ciclos encontram-se sobre a mesma. À medida que os momentos flectores vão aumentando, observa-se um aumento mais acentuado da curvatura não só com a progressão das etapas do ensaios, como também dos ciclos dentro de cada etapa. O facto da parede entrar em regime não linear, provoca uma trajectória dos resultados diferente caso se esteja em fase de carga, ou em fase de descarga.

Para que se compreenda melhor a forma como o modelo numérico determina a evolução da curvatura em função do momento flector, isolou-se a 3ª etapa do ensaio e numerou-se os respectivos ciclos. Estes valores encontram-se presentes na Figura 86.

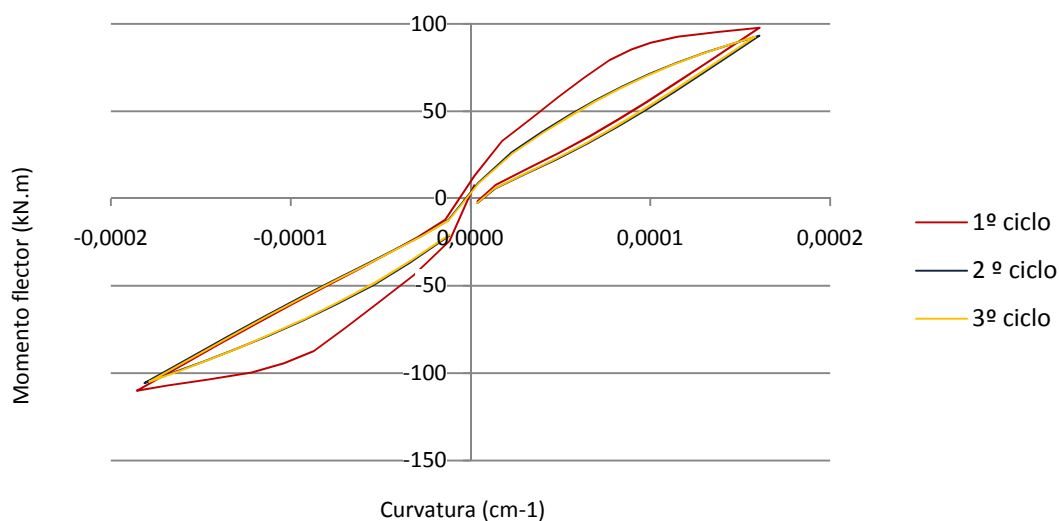


Figura 86. Diagrama momento flector/curvatura na 3ª etapa do ensaio.

Pode-se observar uma grande discrepância entre os valores do 1º ciclo e os valores do 2º e 3º ciclo. Este tipo de comportamento deve-se essencialmente ao facto de ser na fase de carregamento do 1º ciclo que o modelo está a introduzir os danos no modelo, alterando assim a rigidez da parede quando esta volta a ser carregada no 2º e 3º ciclo. É por esta razão que ocorre um aumento mais acentuado da curvatura nestes dois últimos ciclos. Após o 1º ciclo, as diferenças entre as trajectórias dos valores são bastante reduzidas.

Considere-se agora Figura 87 que apresenta os valores das tensões numa fibra de betão de um dos elementos da parede mais esforçados. Para que se pudesse observar com maior rigor o comportamento não linear desta fibra, considerou-se apenas as tensões de compressão no betão.

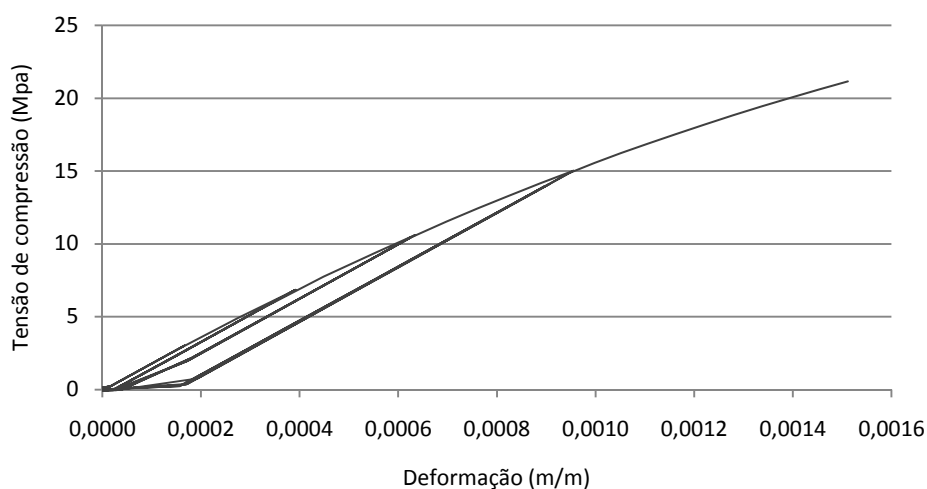


Figura 87. Diagrama tensão/deformação de uma fibra de betão considerando apenas a fase de compressão

Observa-se que ao longo das várias etapas do ensaio, a relação entre a tensão e a deformação segue diferentes trajetórias caso se esteja em fase de carga ou descarga, comprovando assim a ocorrência de plastificações no betão. Na altura que ocorre a rotura da parede resistente, observa-se que as tensões instaladas no betão são consideravelmente inferiores à capacidade resistente máxima, não ocorrendo assim o esmagamento do mesmo.

Por último, determinou-se o diagrama tensão/deformação para a armadura junta à base na face exterior da parede, cujos resultados representam-se na Figura 88.

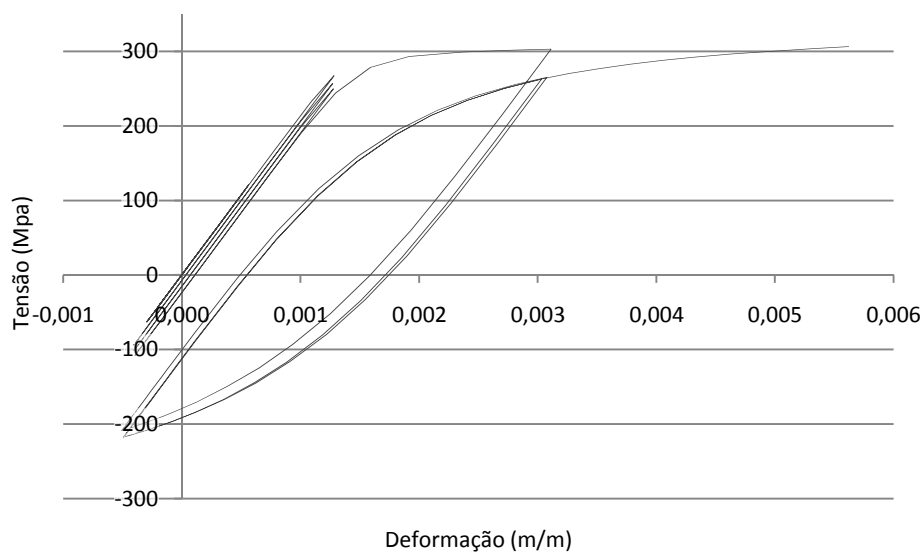


Figura 88. Diagrama tensão/deformação de uma fibra do aço.

Através da observação deste diagrama podemos constatar que ao longo do ensaio ocorrem fortes plastificações da armadura, acabando esta por romper, provocando o colapso da parede resistente. Este tipo de rotura está em concordância com o tipo de dimensionamento que foi executado na parede resistente.

7.5. Comentários finais

O estudo realizado neste capítulo implicou a alteração da forma como os nós e os elementos são criados no OpenSees, de forma a ser possível a análise de elementos verticais

(paredes resistentes), cuja solicitação não ocorre perpendicularmente ao longo de todo o plano, mas sim ao nível da extremidade superior.

Outro aspecto que foi desenvolvido no modelo numérico foi a solicitação da estrutura por aplicação de deslocamentos (*displacement control*) e não carregamentos (*load control*). Esta técnica mostrou algumas vantagens em relação ao carregamento incremental, na medida em que é menos susceptível à ocorrência de erros numéricos e que permite que a matriz rigidez seja recalculada com maior rigor nas fases em que a estrutura possui maior dano. Este último aspecto deve-se essencialmente ao facto de que começam a surgir fendilhações nos elementos da estrutura para deslocamentos relativamente baixos, sendo apenas necessário um número reduzido de incrementos para que esta deixe de se deformar em regime elástico. Após esta fase, o aumento dos deslocamentos dá-se mais rapidamente do que das cargas, e logo, o facto de estar-se a impor que em cada iteração apenas seja permitido um determinado deslocamento (incremento escolhido), permitirá uma evolução das tensões mais lenta, que por sua vez permite um cálculo da matriz rigidez para cada iteração mais realística. Esta relação torna-se clara se observarmos as diferenças entre o diagrama tensão/deformação da Figura 70 e da Figura 81. No primeiro caso, a análise dá-se segundo *load control*, e nota-se uma maior concentração dos pontos que definem o diagrama na fase inicial, e um maior espaçamento na fase final. Ou seja, na fase inicial em que não existe grandes alterações das propriedades mecânicas dos elementos, está-se a analisar com grande pormenor a evolução das tensões, e na fase final, em que existe a necessidade de aplicar pequenos incrementos para que o ensaio possa ser parado quando se atinge a tensão de ruptura dos materiais, está-se a aplicar incrementos demasiado grandes. Este inconveniente é facilmente evitado caso a análise seja feita segundo *displacement control*, em que se observarmos a Figura 81, nota-se claramente uma concentração das iterações na fase final do ensaio e não no início.

Relativamente ao comportamento da parede resistente quando sujeita a carregamentos cíclicos, pode-se constatar que para deslocamentos relativamente pequenos a relação momento/curvatura dos elementos é linear e pode ser definida por uma recta. À medida que os deslocamentos impostos vão aumentando, ocorrem plastificações nos materiais e ocorre fendilhações em ambas as faces do betão, que consequentemente reduzem a rigidez à flexão da parede.

8. PERFORMANCE COMPUTACIONAL

Um dos principais problemas da implementação da não linearidade nas análises estruturais é o tempo e recursos necessários para a resolução das modelações (Vicente, 2008). Neste capítulo, será estudado como varia o tempo de resolução das modelações em função do refinamento aplicado e da complexidade da estrutura a ser estudada. De seguida, serão apresentadas algumas sugestões que podem melhorar consideravelmente a performance computacional das modelações em análises estáticas não lineares.

O tempo que uma dada análise demora a ser executada está directamente relacionado com as características do computador, nomeadamente com a actualidade do hardware e com a ocupação do processador aquando da análise. Dado isto, é importante referir as especificações do computador onde os ensaios deste capítulo foram realizados, já que numa outra máquina os resultados seriam diferentes:

- Processador: Intel Core™2 Duo T9400 @ 2,53GHz
- Memória (RAM): 4,00 GB
- Tipo de sistema: Sistema Operativo de 32 bits Windows Vista

O controlo da ocupação do hardware foi feito usando-se uma aplicação que monitoriza a percentagem de uso tanto do processador como da memória RAM. Desta forma, foi possível realizar-se cada ensaio com o mesmo estado de performance computacional inicial.

8.1. Influência do refinamento

A forma mais simples de minimizar este inconveniente é a aplicação de malhas menos apertadas nas modelações, no entanto, esta escolha pode prejudicar a distribuição das deformações e esforços tal como já foi comprovado anteriormente. De forma a entender-se como varia o tempo necessário para a execução deste tipo de análises com o refinamento da malha, modelou-se uma laje fungiforme com dois vãos suportada por seis pilares tal como indicado na Figura 89.

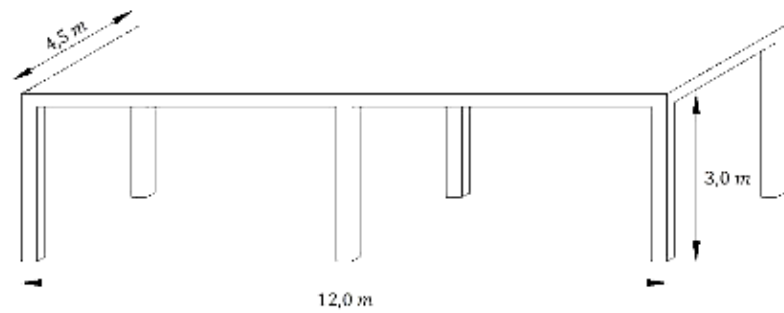


Figura 89. Estrutura 1 composta por uma laje fungiforme suportada por seis pilares.

As propriedades materiais da estrutura 1 encontram-se descritas na Tabela 11 e as características geométricas e a forma como foi armada estão presentes na Tabela 12.

Tabela 11. Propriedades mecânicas dos materiais da estrutura 1.

Estrutura	f_c	f_{ct}	E_c	f_y	f_u	E_s
1	35 MPa	2,2 MPa	34 GPa	275 MPa	310 MPa	200 GPa

Tabela 12. Características geométricas e quantidade de armadura da estrutura 1.

Estrutura	h (laje)	h (pilar)	Armadura		
			A_{sx}	A_{sy}	A_{sl}
1	0,25 m	0,30 m	Ø12//20	Ø12//25	12Ø16

Foi aplicada a mesma quantidade de armadura na face superior e inferior da laje e a disposição dos varões nas secções dos pilares é duplamente simétrica.

Definiu-se sempre um espaçamento dos elementos de viga igual nas duas direcções, formando assim uma malha quadrada ao longo de toda a laje. Para além do peso próprio da estrutura, também foi aplicada uma sobrecarga de 2 kN/m^2 que obrigou a laje a deformar-se em regime não linear sem que se alcançasse a rotura. Estabeleceu-se que este carregamento seria aplicado em vinte incrementos.

A Figura 90 apresenta os tempos necessários à resolução do código em função do espaçamento estabelecido.

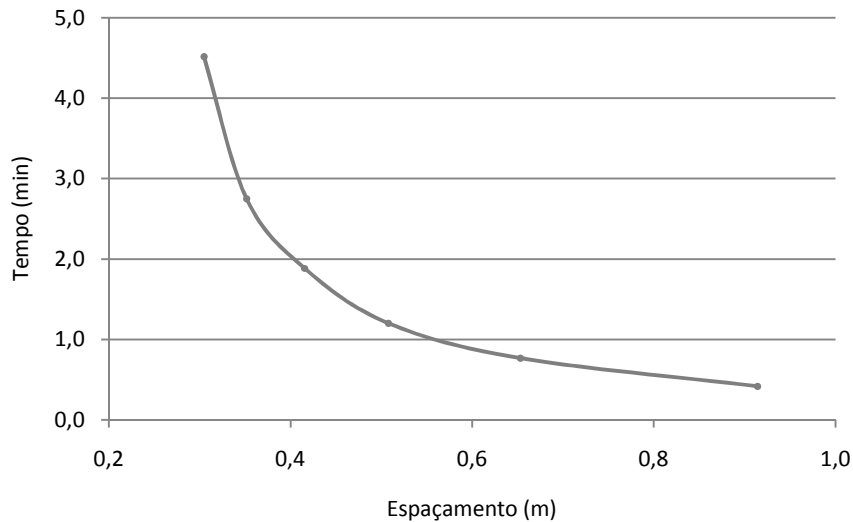


Figura 90. Tempo de resolução do código em função do espaçamento da malha

Podemos constatar que à medida que se vai apertando a malha de vigas, o tempo de análise aumenta exponencialmente. Tentou-se refinar ainda mais a malha, mas começaram a surgir problemas numéricos pelo que o espaçamento mínimo aplicado foi de 0,3 m.

8.2. Influência da dimensão da estrutura

Posteriormente estudou-se a influência da complexidade da estrutura no tempo de resolução do código. Para tal, modelou-se uma estrutura composta por uma laje fungiforme suportada por quatro pilares, e de seguida, foi-se aumentado o número de andares e de vãos, atingindo-se no máximo três vãos de laje ao longo de cinco andares. Os materiais usados na modelação destas estruturas foram os que se encontram caracterizados na Tabela 11 e o reforço foi idêntico ao apresentado na Tabela 12, com salvaguarda para os pilares em que foi necessário definir uma secção maior ($0,40 \times 0,40 \text{ m}^2$) e um reforço mais forte (14Ø16). O espaçamento da malha foi o mesmo para todas as estruturas e o carregamento foi aplicado segundo vinte incrementos.

Para cada estrutura foram realizadas cinco análises estáticas não lineares idênticas, e o resultado final foi a média dos cinco tempos registados. Os valores médios deste estudo encontram-se presentes na Tabela 13.

Tabela 13. Tempo de cálculo (em min) para as várias configurações de estruturas

Nº de Andares \ Nº de vãos	Nº de vãos		
	1	2	3
1	0:10	0:24	0:35
2	0:22	0:58	1:22
3	0:33	1:22	2:05
4	0:45	1:52	3:00
5	0:56	2:18	3:49

Como já se esperava, o tempo de cálculo aumenta claramente com a dimensão da estrutura. É importante que se entenda que as estruturas modeladas neste estudo foram relativamente simples. Não houve elementos estruturais com forma irregular, carregamentos distintos ao longo dos andares ou um grande número de condições fronteira, e mesmo assim, foi necessário cerca de 4 minutos para se analisar uma estrutura com cinco andares e três vãos. Uma estrutura real à partida teria dimensões em planta maiores e um maior número de pilares que tornariam a análise ainda mais pesada a nível computacional. Dado isto, faz todo o sentido que se desenvolva esforços para se melhorar a performance das análises numéricas. Para além da razão anterior, é pertinente que se compreenda que durante a análise estrutural de um determinado edifício está-se constantemente a modificar um grande número de parâmetros como características geométricas, dimensões da malha, graus de liberdade dos apoios ou carregamentos, e não é viável ter de se aguardar mais de quinze minutos pelos resultados das análises cada vez que se modifica algo. Se assim fosse, as análises numéricas de edifícios mais complexos demorariam dias, senão semanas.

Seguidamente, serão apresentadas algumas sugestões que visam o melhoramento da eficácia das análises estáticas não lineares.

8.3. Melhoramento da performance computacional

8.3.1. Por aplicação do carregamento de forma variável

Durante os vários ensaios realizados neste trabalho, verificou-se que o número de incrementos em que o carregamento era dividido tratava-se de um parâmetro que influenciava directamente o tempo de resolução do código. No entanto, trata-se de um factor que não se pode

menosprezar na medida em que a aplicação das cargas de uma forma demasiado rápida, não permite que a matriz rigidez da estrutura seja recalculada com as novas propriedades materiais com um rigor satisfatório ou tendo em consideração os danos que vão surgindo nos elementos. Apesar disto, tal como já foi descrito anteriormente, ao carregar-se uma estrutura verifica-se que para carregamentos relativamente baixos, os esforços e deslocamentos são proporcionais às cargas aplicadas (fase elástica). Observe-se a Figura 91 que apresenta a relação entre a flecha máxima e o carregamento da estrutura 1 (Figura 89) até à sua rotura.

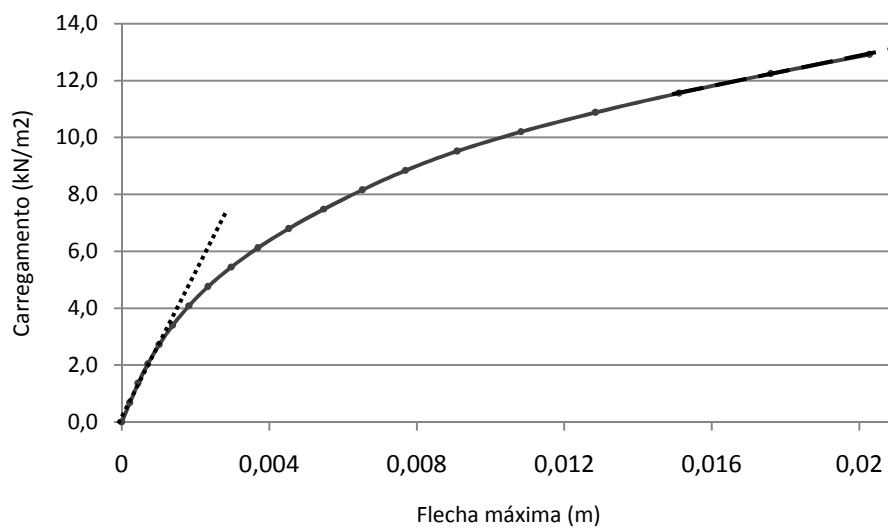


Figura 91. Relação entre carregamento e flecha máxima da estrutura 1.

Através da observação da figura acima, pode-se comprovar que o comportamento inicial dos deslocamentos da laje pode ser descrito por uma recta (linha a ponteados), assim como a fase final antes da rotura (linha a tracejado). Dado isto, podemos afirmar que inicialmente são aplicados no mínimo cinco incrementos de carga sem que exista uma alteração significativa das propriedades dos materiais ou grau de dano da estrutura. Sendo assim, coloca-se a questão: porque não aplicar directamente um carregamento equivalente a estes cinco incrementos de carga? De forma a obter-se uma resposta foram estudadas as diferenças entre a flecha obtida aplicando-se o carregamento de uma só vez, ou progressivamente. Conclui-se que caso se divida o carregamento total em vinte incrementos, é viável aplicar-se os cinco primeiros incrementos de uma só vez, e de seguida, continuar a aplicar as cargas progressivamente. Esta modificação na forma como o carregamento é aplicado permitiu uma redução no tempo de análise em cerca de 20%.

É importante entender que este tipo de simplificação só será viável para estruturas regulares que apresentem uma fase elástica distinta. No caso de estruturas irregulares em que é possível que para solicitações baixas alguns elementos entrem rapidamente em comportamento não linear, esta abordagem não deverá ser aplicada.

A relação entre os deslocamentos e a carga aplicada volta a ser linear na fase final do carregamento, no entanto, para que se possa determinar com rigor a carga de rotura da estrutura, é importante que os incrementos sejam relativamente baixos. Por exemplo, admita-se uma determinada estrutura cuja carga de colapso é de 21 kN/m^2 . Caso se aplicasse incrementos de 5 kN/m^2 , o sistema deixaria de convergir para uma carga de 25 kN/m^2 , ou seja, teríamos um erro de 16%. Este inconveniente é facilmente eliminado aplicando-se incrementos mais baixos, justificando-se assim o porquê de aplicar lentamente o carregamento em análises não lineares na fase final.

8.3.2. Pela combinação de elementos com comportamento linear e não linear

Uma das vantagens das análises lineares em relação às análises não lineares é sem dúvida o tempo necessário para cada análise. O facto das modelações lineares não tomarem em consideração as leis constitutivas dos materiais ou a ocorrência de fendas e plastificações, torna-as consideravelmente mais rápidas. Tal como visto no ponto anterior, de uma forma geral as estruturas regulares apresentam uma fase elástica até um determinado carregamento. A partir deste ponto, as zonas mais esforçadas começam a sofrer danos, iniciando-se assim o comportamento não linear da estrutura. No entanto, os elementos mais afastados destas zonas mais esforçadas podem continuar a deformar-se unicamente no domínio elástico até se atingir o carregamento máximo. Sendo assim, estas zonas podem ser modeladas usando-se elementos elásticos, já que não se justifica o uso do modelo de fibras para a reprodução do efeito não linear. Uma abordagem semelhante para o melhoramento da performance pode ser encontrada em Varum (2003). Neste trabalho modelou-se uma estrutura porticada de betão armado e optou-se por se aplicar elementos de barra elásticos nas zonas centrais das vigas e pilares onde os esforços são relativamente baixos, e elementos com comportamento não linear (modelo de fibras), nas zonas em redor dos nós onde se espera que ocorram danos consideráveis.

De forma a comprovar esta hipótese, foi modelada uma laje suportada por duas vigas em bordos opostos, tal como representado na Figura 92.

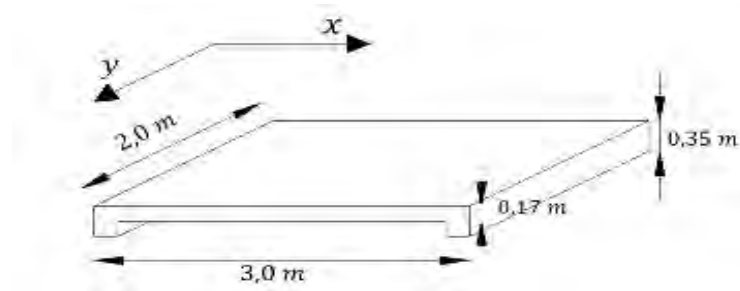


Figura 92. Laje apoiada em duas vigas nos bordos apostos.

As propriedades dos materiais aplicados são idênticas às presentes na Tabela 11 e apenas foi usada armadura na face inferior da laje ($\emptyset 12//0,15$). As características dimensionais e tipo de reforço atribuídos às vigas obrigam as fibras da laje segundo a direcção x a deformarem-se muito mais do que as fibras segundo a direcção y .

Em relação ao carregamento, aplicou-se uma carga de 5 kN/m^2 equivalente ao peso próprio mais possíveis revestimentos, e admitiu-se uma situação em que a laje era carregada com o dobro da sobrecarga de dimensionamento, ou seja, 4 kN/m^2 .

Com vista a verificar-se se a laje deforma-se em regime não linear, determinou-se a flecha máxima em função do carregamento. Os resultados deste estudo apresentam-se Figura 93.

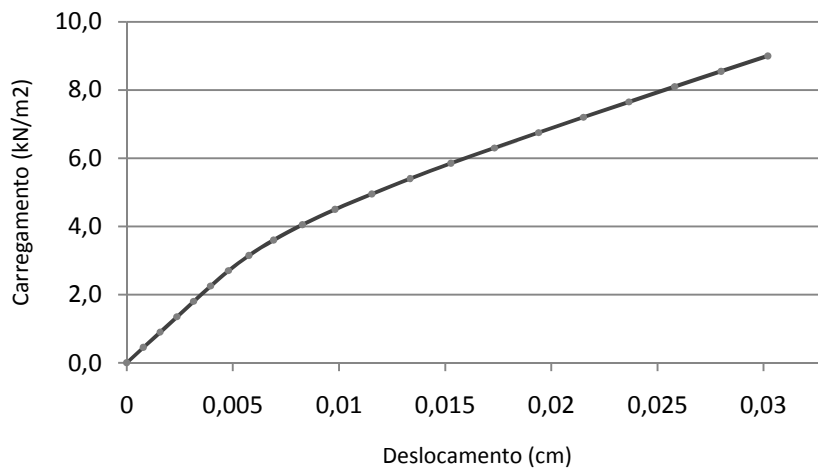


Figura 93. Deslocamentos em função do carregamento da laje apoiada nos bordos.

Através da observação da figura anterior pode-se constatar que a relação entre deslocamentos e carregamento não é linear, havendo perda de rigidez ao longo do carregamento. A forma como a laje se deforma introduz curvaturas consideráveis nas fibras segundo x , e curvaturas pouco acentuadas nas fibras segundo y , colocando assim a hipótese dos elementos

segundo a direcção x estarem a deformar-se em regime não linear, enquanto que os elementos segundo a direcção y apenas em regime elástico. De modo a esclarecer esta suposição foram determinados os diagramas tensão/deformação das fibras da face inferior da laje de um elemento segundo cada direcção a meio vão.

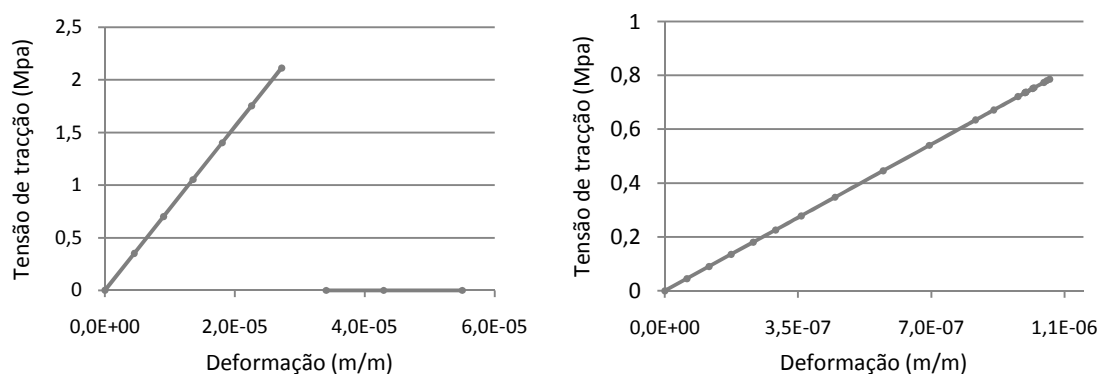


Figura 94. Diagrama tensão/deformação: a) elemento segundo x ; b) elemento segundo y

Podemos observar que a tensão de tracção resistente do betão é atingida no elemento segundo x , mas mantém-se relativamente baixa no elemento segundo a direcção y , comprovando assim a hipótese de comportamento distinto em cada direcção.

Analizando agora as fibras segundo a direcção x , pode-se ainda verificar se ocorre fendilhação nos elementos mais afastados do centro, ou se também estes se deformam apenas em regime elástico. Determinou-se diagramas de momento/curvatura e tensão/deformação para as fibras da face inferior, e verificou-se que os elementos apenas se começam a deformar em regime não linear a uma distância de 0,5 m das vigas de suporte.

Tendo em conta esta informação, decidiu-se substituir alguns dos elementos da malha, por elementos com capacidade para se deformarem unicamente em regime elástico. Para tal considerou-se quatro situações distintas:

- Situação I: Condição original sem qualquer substituição de elementos;
- Situação II: Aplicação de elementos elásticos na direcção y ;
- Situação III: Aplicação de elementos elásticos na direcção x nas zonas menos esforçadas;
- Situação IV: Aplicação de elementos elásticos em todas as barras que se deformam somente em regime elástico.

A Tabela 14 descreve as variações que estas modificações produziram no comportamento global da laje (flecha máxima e esforços) e ainda o tempo necessário à resolução do código.

Tabela 14. Variação dos esforços e deslocamentos com a alteração de elementos.

	Flecha máxima (cm)	M_x (kN.m/m)	M_y (kN.m/m)	Tempo de cálculo (min)	Variação relativa
Situação I	0,28	0,87	12,39	00:14	-
Situação II	0,28	1,54	12,48	00:10	29%
Situação III	0,28	0,11	12,10	00:13	7%
Situação IV	0,28	2,01	12,46	00:09	36%

Comprovou-se que não ocorrem alterações significativas dos deslocamentos ou momentos segundo a direcção x alterando-se o tipo de elementos que constituem a malha. Em contrapartida, observaram-se alterações significativas dos momentos segundo a direcção y , embora estes se mantenham relativamente baixos. No que diz respeito à eficácia da modelação, podemos concluir que houve um melhoramento considerável da performance.

8.4. Comentários finais

Quando se opta por analisar uma determinada estrutura não linearmente, sabe-se a priori que o seu estudo será mais demorado e exigirá uma maior compreensão de todos os parâmetros envolvidos. Um dos grandes inconvenientes é sem dúvida o tempo necessário para a execução de cada análise, que tal como provado neste capítulo, depende essencialmente do grau de discretização das modelações, do tamanho da estrutura, do número de incrementos em que se divide a solicitação e da capacidade de processamento do computador.

Nesta secção foram ainda testadas algumas simplificações que podem ser introduzidas no modelo numérico, que permitem uma redução considerável do tempo de resolução do código. No entanto, tal como referido anteriormente, é importante entender que este tipo de simplificações apenas poderão ser aplicadas em estruturas regulares.

Esta desvantagem da implementação da não linearidade material nas análises estruturais, tem sido alvo de imensos estudos ultimamente, tendo surgido algumas soluções para a redução dos tempos de análise. Uma delas, é a introdução do processamento paralelo nas modelações numéricas (McKenna e Fenves, 2007). Esta técnica consiste em dividir o esforço computacional por um maior número de processadores, permitindo assim uma resolução bastante mais rápida dos modelos numéricos. Esta abordagem pode ser executada usando-se desde redes de computadores, a apenas um computador munido de vários processadores. Embora esta técnica possa parecer relativamente simples, a criação de rotinas que permitam partilhar o esforço computacional por vários processadores tem-se mostrado bastante complexa. O *software* OpenSees trata-se da aplicação com melhores desenvolvimentos nesta área.

9. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

9.1. Conclusões

A recolha de informação teórica durante o desenvolvimento desta dissertação permitiu se compreendesse a forma como a concepção estrutural dos elementos estruturais com formulações de casca tem vindo a evoluir ao longo dos tempos. Pode-se afirmar que condicionantes como a necessidade de espaços amplos e exigências arquitectónicas têm provocado um aumento da esbelteza destes elementos, que consequentemente os torna mais deformáveis. Este aspecto aumentou a necessidade do desenvolvimento de ferramentas informáticas que permitam a análise do comportamento destas estruturas em regime não linear. Foi também possível concluir que as ferramentas de análise não linear disponíveis actualmente possuem inconvenientes como o grande esforço computacional ou a grande complexidade na construção dos modelos numéricos.

O uso do software OpenSees nesta dissertação mostrou-se sem dúvida uma mais-valia no estudo do comportamento destes elementos. Através desta aplicação, foi possível criar-se um código que permite uma nova abordagem ao estudo dos elementos de casca, tendo em consideração a não linearidade dos materiais. Este modelo numérico baseado na criação de malhas de vigas provou fornecer resultados com um grau de satisfação idêntico aos outros métodos disponíveis, mas com a vantagem de exigir um menor esforço computacional e com uma maior facilidade na modelação da estrutura que se pretende analisar.

Através do estudo da influência do refinamento aplicado às modelações em análises lineares, foi possível compreender-se a forma como os resultados vão variando à medida que se altera o espaçamento da malha de vigas. De uma forma geral, observou-se que refinamentos pouco complexos têm tendência a originar deslocamentos baixos, e que à medida que se vai aumentando a discretização, a variação dos resultados tende a estabilizar. Tendo em conta os vários ensaios numéricos realizados em lajes com dimensões distintas, concluiu-se que o espaçamento mínimo para que se obtenham resultados satisfatórios está directamente relacionado com as dimensões em planta do elemento de casca. Para que os resultados obtidos com o modelo de malha de vigas pudessem ser comparados com outras formulações, foram criadas expressões que permitem calcular o espaçamento mínimo da malha em função das dimensões do elemento:

$$\Delta l = 0,0476 \times l \quad (m)$$

Deve-se no entanto ter o cuidado de aplicar um refinamento mais complexo em zonas de concentração de cargas ou de ligação a outros elementos estruturais como pilares ou paredes resistentes.

Relativamente ao que foi estudado sobre o grau de refinamento em análises não lineares, verifica-se que não só a distribuição de esforços e deformações é afectada pela discretização escolhida, como também a própria capacidade resistente do elemento estrutural. Apesar disto, verificou-se que ao se aplicar malhas mais apertadas, os resultados para a capacidade resistente começam a estabilizar, podendo-se assim definir um refinamento a partir do qual não ocorrem variações significativas. Este aspecto não acontece quando se estuda a variação dos deslocamentos, em que se verifica um constante aumento dos mesmos à medida que também se aumenta o grau de discretização. Podemos então concluir que para análises não lineares, o uso de malhas apertadas não produzem necessariamente bons resultados.

O estudo do cálculo das propriedades mecânicas atribuir aos elementos de barra que compõem a malha de vigas, permitiu que se tirassem importantes conclusões quanto às expressões que deverão ser usadas no modelo numérico. Foi possível concluir-se que a inércia de flexão deverá ser calculada através da expressão:

$$I = \frac{bh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Enquanto que a inércia de torção deverá ser determinada pela expressão:

$$I_t = \frac{bh^3}{6}$$

Usando-se estas equações, comparou-se as deformações e esforços obtidos numericamente, com os valores calculados recorrendo-se à solução exacta de Navier e concluiu-se que os resultados são bastante satisfatórios.

A comparação dos valores obtidos numericamente com os resultados experimentais de Pires (2003), permitiu constatar-se que o modelo numérico proposto representou com grande rigor o comportamento não linear de ambas as lajes. Em Bandeira (2006), são apresentados dois modelos numéricos alternativos para o estudo do comportamento não linear das lajes testadas em Pires (2003). No primeiro modelo, as lajes são modeladas usando-se uma abordagem de camadas de elementos finitos de casca e no segundo, recorre-se a uma formulação com elementos finitos tridimensionais para a modelação das mesmas lajes. A Tabela 15 apresenta as cargas de rotura e respectivos deslocamentos máximos obtidos experimentalmente e por cada um dos modelos numéricos.

Tabela 15. Comparação entre resultados experimentais e numéricos.

Parâmetro		Resultados experimentais	Malha de vigas	Elementos finitos de casca	Elementos finitos tridimensionais
Laje 1	Carga de rotura (kN)	65,0	71,8	77,0	66,0
($h = 0,10\text{ m}$)	Deslocamento (m)	0,0235	0,0258	0,0245	0,0225
Laje 2	Carga de rotura (kN)	118,5	122,5	124,5	113,5
($h = 0,15\text{ m}$)	Deslocamento (m)	0,0105	0,0107	0,0128	0,0125

Uma avaliação crítica dos resultados permitiu apontar alguns aspectos que podem provocar a discrepância entre resultados numéricos e experimentais dos quais se destacam os seguintes:

- Mau conhecimento das propriedades dos materiais;
- Incapacidade das leis constitutivas de representarem com rigor o comportamento não linear do betão com dano excessivo;
- Grau de refinamento da malha inadequado;
- Aplicação dos carregamentos num número de incrementos insuficiente;
- Variações da posição da armadura ao longo da espessura da laje (disposições construtivas);
- Não concordância dos critérios de paragem dos ensaios entre os testes experimentais e os modelos numéricos;

O estudo de análises cíclicas não lineares em elementos verticais (paredes resistentes), implicou a alteração da forma como o código constrói as malhas de vigas, para que também fosse possível o estudo deste tipo de elementos. A par destas alterações, decidiu-se também executar as análises aplicando-se deslocamentos e não carregamentos. Foram comparados os diagramas

tensão/deformação gerados através destas duas técnicas e concluiu-se que a realização de análise controlando-se os deslocamentos mostrou-se mais vantajosa.

No que diz respeito ao comportamento da parede resistente analisada, concluiu-se que para deslocamentos relativamente pequenos a relação momento/curvatura dos elementos é linear e que à medida que os deslocamentos impostos foram aumentando, surgiram plastificações nos materiais e ocorreram fendilhações em ambas as faces do betão, que consequentemente reduziram a rigidez à flexão da parede. Dado isto, pode-se afirmar que o modelo numérico foi capaz de representar o comportamento não linear do elemento vertical.

Por último, avaliou-se a performance computacional do modelo numérico criado. Concluiu-se que as análises não lineares podem ser bastante demorosas pelo que faz todo o sentido que se desenvolva simplificações, que melhorem a eficácia dos modelos numéricos.

Relativamente aos parâmetros que mais influenciam o tempo de execução das análises, concluiu-se que aspectos como o grau de discretização das modelações, o tamanho da estrutura, o número de incrementos em que se divide a solicitação e a capacidade de processamento do computador influenciam fortemente a performance dos modelos numéricos. Foram ainda testadas algumas simplificações que permitem uma redução considerável do tempo de resolução do código, tal como a aplicação de cargas de acordo com fase de comportamento dos elementos ou a introdução de elementos elásticos em zonas pouco solicitadas, tendo-se concluído que a performance foi consideravelmente melhorada.

De uma forma geral, foi possível constatar-se que esta estratégia simplificada de análise do comportamento não linear de elementos laminares oferece resultados bastante satisfatórios, tendo a vantagem de ser facilmente manuseada e pouco pesada a nível computacional.

9.2. Perspectivas de trabalho futuro

Sendo o tempo para a execução desta dissertação limitado, não houve oportunidade de implementar algumas ideias, pelo que ficam aqui algumas sugestões de trabalho futuro.

- Comparação mais pormenorizada entre os valores numéricos dados por este modelo e outras formulações, como a de camadas de elementos finitos ou a de elementos finitos tridimensionais. Seria interessante confrontar as distribuições de esforços e deslocamentos de modelações de lajes fungiformes, avaliando-se sempre o tempo necessário para a obtenção dos mesmos;
- Sendo as lajes fungiformes cada vez mais usadas hoje em dia, seria interessante poder confrontar resultados numéricos com resultados de ensaios em que se testassem lajes fungiformes até à sua rotura;
- Adaptação do modelo numérico para a possibilidade de modelar-se não só paredes resistentes como também núcleos de escadas ou elevadores. Existem imensos ensaios experimentais neste tipo de estruturas, pelo que a calibração do modelo seria possível;
- Realização de análises dinâmicas do tipo *groundmotion*, para que se pudesse avaliar a distribuição de esforços e deslocamentos no elemento, assim como a performance computacional do modelo neste tipo de análises;
- Estudo da variação dos resultados numéricos com o grau de refinamento das estruturas em regime não linear. É um problema extremamente importante e que infelizmente ainda não possui respostas claras. Embora a solução ao problema esteja na modificação da forma como o modelo numérico implementa os danos nos elementos, seria interessante usar-se dados experimentais para se alcançar expressões empíricas que fornecessem um espaçamento que minimizasse este inconveniente.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI Committee (2002); *"Building code requirements for structural concrete and commentary"*. American Concrete Institute, Detroit, EUA.
- Antoniou, S.; Pinho, R. (2004); *"Development and Verification of a Displacement-Based Adaptive Pushover Procedure"*. Journal of Earthquake Engineering, Vol. 8, No.5.
- Azevedo, A. F. M. (2003); *"Método dos elementos finitos"*. 1ª Edição, publicação da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Bandeira, M. S. (2006); *"Análise não linear de lajes de concreto pelo métodos dos elementos finitos"*. Tese de mestrado da Universidade federal de Goiás, Goiânia, Brasil.
- Beyer, K., Dazio, A., Priestley, M. J. N. (2008); *"Seismic design of torsionally eccentric buildings with U-shaped RC walls"*. IUSS Press, Pavia, Italy.
- Bhatt, C. (2007); *"Análise Sísmica de Edifícios de Betão Armado segundo o Eurocódigo 8 – Análises Lineares e Não Lineares"*. Tese de mestrado do Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.
- Cachim, P. B. (2005); *"Lajes de betão armado"* Apontamento teóricos da cadeira de Estruturas de betão armado e pré-esforçado da Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
- Carvalho, R. C. (1994); *"Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto através da analogia de grelha"*. Tese de doutoramento da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Castro, L. M. S. (2000); *"Modelação de Lajes com Elementos de Grelha"*. Apontamentos teóricos da cadeira de Análise de Estruturas II do Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.
- CEN (2003); *"Eurocode 2: Design of concrete structures"* – Parte 1-2.
- Clarke, L. A.; Cope, R. J. (1984); *"Concrete Slabs, Analysis and design"*. Publicação de Routledge.
- Clough, R.; Penzien, J. (1975); *"Dynamics of Structures"*. Publicação de McGraw-Hill.

- Coelho, J. D.; Loriggio, D.D.; *“Modelagem de lajes de concreto armado pela analogia de grelha”*. Análise de lajes de concreto armado (sequência de artigos), Eberick, Brasil.
- Computers and Structures, Inc (2004); *“CSI Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS and SAFE”*.
- Correia, A., Pacheco, A. J., Pinho, R. (2007); *“Comparação entre formulações de equilíbrio e deslocamentos na análise não linear de estruturas porticadas de betão armado”*. Sísmica 2007 – 7º Congresso de sismologia e engenharia sísmica.
- Delgado, R.; Arêde, A. (2000); *“Dinâmica de estruturas”*. Apontamentos teóricos da cadeira de dinâmica de estruturas da Faculdade de Engenharia do Porto, Porto, Portugal.
- Dória, L. E. S. (2007); *“Projecto em estrutura de fundação em concreto do tipo radier”*. Tese de mestrado da Universidade Federal de Alagoas, Maceió, Brasil.
- Gere, Timoshenko, S. (1990); *“Mechanics of Materials”*. PWS Publishing Company, 3ª edição, Boston, EUA.
- GESTEC - Grupo de Gestão e Tecnologia da Construção (2006); *“Processos de Construção”*. Aulas teóricas da cadeira de processos de construção do Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.
- Guedes, J. (1997); *“Seismic behaviour of reinforced concrete bridges. Modelling, numerical analysis and experimental assessment”* – Tese de doutoramento da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Hamvly, E. (1976); *“Bridge Deck Behavior”*. Chapman and Hall, Londres.
- Hillerborg, A. (1956); *“Strip Method Design Handbook”*. Publicação de Taylor & Francis Group.
- Ile, N.; Reynouard, J. M. (2000); *“Nonlinear analysis of reinforced concrete shear wall under earthquake loading”*. Journal of Earthquake Engineering, Vol. 4. No. 5.
- Ile, N.; Reynouard, J. M. (2005); *“Behaviour of U-shaped walls subjected to uniaxial and biaxial cyclic lateral loading”*. Journal of Earthquake Engineering, Vol. 9. No. 1.
- Janberg, N.; *“Structurae”*. Acedido a 22/03/09 <http://www.structurae.de/>

- Leitão, V. M. A.; Castro, L. M. S. (2005); *“Apontamentos sobre análise de lajes”*. Apontamentos da cadeira de Estruturas 2 do Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal.
- Mazzoni, S., McKenna F., Scott, M., Fenves, G., L. (2006) – *“OpenSees Command Language Manual”*. Manual do Utilizador do OpenSees disponível no site do software.
- McKenna, F.; Fenves G. L. (2007); *“Using the OpenSees Interpreter on Parallel Computers”*. Publicação da University of California, Berkeley, EUA.
- Menegotto, M.; Pinto, P.E. (1973); *“Methods of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behaviour of elements under combined normal force and bending”*. IABSE, Lisboa, Portugal.
- PARK, Y.; ANG, H. (1985); *“Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete”*. ASCE, Journal of Structural Engineering, Volume 111, Nº4.
- Pires, E. F. (2003) *“Comportamento e desempenho do reforço à flexão de lajes de concreto armado através do aumento da seção comprimida”*. Tese de mestrado da Universidade de Minas Gerais, Minas Gerais, Brasil.
- Phuvoravan, K.; Sotelino, E. D. (2005); *“Non linear finite element for reinforced concrete slabs”* Journal of Structural Engineering (April 2005)
- Soriano, H. (2003); *“Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas”*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil.
- Sussekkind, J. C. (1979); *“Curso de concreto: concreto armado”*. Edição Globo, Rio de Janeiro, Brasil.
- Timoshenko, S. (1989); *“Theory of Plates and Shells”*. MxGraw-Hill, 2ª edição, San Francisco, EUA.
- Varum, H. (2003); *“Seismic assessment, strengthening and repair of existing buildings”*; Tese de doutoramento da Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
- Vicente, R. (2008); *“Estratégias e metodologias para intervenções de reabilitação urbana”*. Tese de doutoramento da Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.

ANEXO A

Código para a análise não linear de elementos de laminas horizontais (lajes)

```

wipe;                                # limpa a memória de todas as análises efectuadas anteriormente
model BasicBuilder -ndm 3 -ndf 6;    # define o número de dimensões e graus de liberdade
set dataDir Data;
file mkdir $dataDir;

source LibUnits.tcl;                # define o sistema de unidades

set dirx 25                          #define o número de divisões na direcção x
set diry 25                          #define o número de divisões na direcção y

set alt1 [expr 10*$ft];              # altura da laje do primeiro piso (cota)
set lx [expr 15*$ft];                # distância na direcção x (consultar convenção de eixos)
set ly [expr 15*$ft];                # distância na direcção y (consultar convenção de eixos)

set numBarsSlabxI 10;                # numero de barras na face inferior de aço na direcção x
set barAreaSlabxI [expr 2.5*$in2/($dirx)]; # area das barras na face inferior colocadas na direcção x
set numBarsSlabxS 10;                # numero de barras de aço na face superior na direcção x
set barAreaSlabxS [expr 1*$in2/($dirx)]; # area das barras na face superior colocadas na direcção x
set numBarsSlabyI 10;                # numero de barras na face inferior de aço na direcção y
set barAreaSlabyI [expr 2.5*$in2/($diry)]; # area das barras na face inferior colocadas na direcção y
set numBarsSlabyS 10;                # numero de barras na face superior de aço na direcção y
set barAreaSlabyS [expr 1*$in2/($diry)]; # area das barras na face superior colocadas na direcção y

set thickness [expr 7*$in];          # espessura da laje

set n 5;                             # número do primeiro nó da laje do primeiro piso (variavel)
set pnp $n;                           # número do primeiro nó da laje do primeiro piso (nao varia)

# DEFINIÇÃO DOS MATERIAIS

set fc [expr -5.*$ksi];
set Ec [expr 57*$ksi*sqrt(-$fc/$psi)];
source LibMaterialsRC.tcl;          # define a biblioteca dos materiais

# CRIAÇÃO DA LAJE e VIGAS DO PRIMEIRO PISO

#Criação dos nós na laje

for {set i 0} {$i < [expr $diry]} {incr i 1} {
    for {set j 0} {$j < [expr $dirx]} {incr j 1} {
        node $n [expr $i*$lx/($diry-1)] $alt1 [expr $j*$ly/($dirx-1)]
        set n [expr $n+1]
    }
}

set unpp [expr $n-1];                # número do último nó da laje do primeiro piso (nao varia)

#Parâmetros geométricos da laje

#vigas interiores segundo x
set HSlabx $thickness
set BSlabx [expr $ly/($dirx-1)]
puts $BSlabx
set ASlabx [expr $HSlabx*$BSlabx];    # cross-sectional area
set IzSlabx [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlabx*pow($HSlabx,3)];          # Beam moment of inertia
set IySlabx [expr 1./12*$HSlabx*pow($BSlabx,3)];
set GSlabx [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlabx [expr 2*$IzSlabx]

```

```

#vigas interiores segundo y
set HSlaby $thickness
set BSlaby [expr $lx/($diry-1)]
puts $BSlaby
set ASlaby [expr $HSlaby*$BSlaby]; # cross-sectional area
set IzSlaby [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlaby*pow($HSlaby,3)]; # Beam moment of inertia
set IySlaby [expr 1./12*$HSlaby*pow($BSlaby,3)];
set GSlaby [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlaby [expr 2*$IzSlaby]

#Parâmetros geométricos das vigas dos bordos

#segundo x
set BSlabxb [expr ($ly/($dirx-1))/2]
set ASlabxb [expr $HSlabx*$BSlabxb]; # cross-sectional area
set Izlabxb [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlabxb*pow($HSlabx,3)]; # Beam moment of inertia
set Iylabxb [expr 1./12*$HSlabx*pow($BSlabxb,3)];
set GSlabxb [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlabxb [expr 2*$Izlabxb];

#segundo y
set BSlabyb [expr ($lx/($diry-1))/2]
set ASlabyb [expr $HSlaby*$BSlabyb]; # cross-sectional area
set IzSlabyb [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlabyb*pow($HSlaby,3)]; # Beam moment of inertia
set IySlabyb [expr 1./12*$HSlaby*pow($BSlabyb,3)];
set GSlabyb [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlabyb [expr 2*$IzSlabyb];

#Parâmetros geometricos das colunas

set LCol [expr 30*$in]; #secção quadrada para colunas

#DEFINIÇÃO DE SECÇÕES
set ColSec 1;
set SlabxSec 2;
set SlabySec 3;
set SlabxbSec 4;
set SlabybSec 5;
set ColSecfiber 5;
set SlabxSecfiber 6;
set SlabySecfiber 7;
set SlabxbSecfiber 8;
set SlabybSecfiber 9;
set SecTorsionSlabx 10;
set SecTorsionSlaby 11;
set SecTorsionSlabxb 12;
set SecTorsionSlabyb 13;

#Definação da secção dos elementos da laje na direcção x
set coverSlabx [expr 2.*$in]; # Column cover to reinforcing steel NA.

set coverYsx [expr $HSlabx/2.0]; set coverZsx [expr $BSlabx/2.0]; set coreYsx [expr $coverYsx-
$coverSlabx]
set coreZsx [expr $coverZsx]
set nfy 10; # número divisões da secção na direcção y
set nfz 5; # número divisões da secção na direcção z

```



```

section fiberSec $SlabxSec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsx $coverZsx -$coverYsx -$coverZsx $coverYsx -$coverZsx
$coverYsx $coverZsx;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabxl -$scoreYsx $scoreZsx -$scoreYsx -$scoreZsx;
};

```

#Definição da secção dos elementos da laje na direcção y

```

set coverSlaby [expr 2.*$in];
set coverYsy [expr $HSlaby/2.0];
set coverZsy [expr $BSlaby/2.0];
set coreYsy [expr $coverYsy-$coverSlaby]
set coreZsy [expr $coverZsy]
set nfY 10;          # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5;           # número divisões da secção na direcção z

```

```

section fiberSec $SlabySec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsy $coverZsy -$coverYsy -$coverZsy $coverYsy -$coverZsy
$coverYsy $coverZsy;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabyl -$scoreYsy $scoreZsy -$scoreYsy -$scoreZsy;
};

```

#Definição da secção dos elementos da laje (bordos) na direcção x

```

set coverSlabx [expr 2.*$in];
set coverYsx [expr $HSlabx/2.0];
set coverZsx [expr $BSlabxb/2.0];
set coreYsx [expr $coverYsx-$coverSlabx]
set coreZsx [expr $coverZsx]
set nfY 10;          # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5;           # número divisões da secção na direcção z

```

```

section fiberSec $SlabxbSec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsx $coverZsx -$coverYsx -$coverZsx $coverYsx -$coverZsx
$coverYsx $coverZsx;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabxl -$scoreYsx $scoreZsx -$scoreYsx -$scoreZsx;
};

```

#Definição da secção dos elementos da laje (bordos) na direcção y

```

set coverSlaby [expr 2.*$in];
set coverYsy [expr $HSlaby/2.0];
set coverZsy [expr $BSlabyb/2.0];
set coreYsy [expr $coverYsy-$coverSlaby]
set coreZsy [expr $coverZsy]
set nfY 10;          # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5;           # número divisões da secção na direcção z

```

```

section fiberSec $SlabybSec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsy $coverZsy -$coverYsy -$coverZsy $coverYsy -$coverZsy
$coverYsy $coverZsy;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabyl -$scoreYsy $scoreZsy -$scoreYsy -$scoreZsy;
};

```

atribuir rigidez à torção

```

uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlabx $JSlabx
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlaby $JSlaby
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlabxb $JSlabxb
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlabyb $JSlabyb

```

```
section Aggregator $SlabxSecfiber $SecTorsionSlabx T -section $SlabxSec
section Aggregator $SlabySecfiber $SecTorsionSlaby T -section $SlabySec
section Aggregator $SlabxbSecfiber $SecTorsionSlabxb T -section $SlabxbSec
section Aggregator $SlabybSecfiber $SecTorsionSlabyb T -section $SlabybSec
```

```
set IDSlabxTransf 1
set IDSlabyTransf 2
```

```
geomTransf Linear $IDSlabxTransf 0 0 1;
geomTransf Linear $IDSlabyTransf 1 0 0;
set np 5
```

```
# ELEMENTOS NA DIRECÇÃO Y
```

```
set controlnode 1
set controlele 1
set nele 1
set nnode [expr $n-$dirx*$diry]
#set nnode 1

for {set k 0} {$k < [expr $diry*($dirx-1)]} {incr k 1} {
    if {$controlnode < $dirx} {
        if {$controlele < [expr $dirx]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $BeamSecfiber
            $IDSlabyTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabybSecfiber
            $IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabx $Ec $GSlabx
            $JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        } else {
            if {$controlele > [expr $diry*($dirx-1)-$dirx +1]} {
                #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $BeamSecfiber
                $IDSlabyTransf;
                element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabybSecfiber
                $IDSlabyTransf;
                #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabx $Ec $GSlabx
                $JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabyTransf;
                set controlele [expr $controlele + 1]
            } else {
                element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabySecfiber
                $IDSlabyTransf;
                #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabx $Ec $GSlabx
                $JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabyTransf;
                set controlele [expr $controlele + 1]
            }
        }
        set nele [expr $nele+1]
        set nnode [expr $nnode+1]
        set controlnode [expr $controlnode+1]
    } else {
        set controlnode 1
        set nnode [expr $nnode+1]
        if {$controlele < [expr $dirx]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $BeamSecfiber
            $IDSlabyTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabybSecfiber
            $IDSlabyTransf;
```

```

        #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabyTransf;
        set controlele [expr $controlele + 1]
    } else {
        if {$controlele > [expr $dirx*($dirx-1)-$dirx +1]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $BeamSecfiber
$IDSlabyTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabybSecfiber
$IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        } else {
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabySecfiber
$IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        }
    }
    set nele [expr $nele+1]
    set nnode [expr $nnode+1]
    set controlnode [expr $controlnode+1]
}}

# ELEMENTOS NA DIRECÇÃO X

set controlnode 1
set controlele 1
set nnode [expr $n-$dirx*$diry]
for {set k 0} {$k < [expr $dirx*($diry-1)]} {incr k 1} {
    if {$controlnode<$diry} {
        if {$controlele < [expr $diry]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        } else {
            if {$controlele > [expr $dirx*($dirx-1)-$dirx +1]} {
                #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
                element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
                #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
                set controlele [expr $controlele + 1]
            } else {
                element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxSecfiber
$IDSlabxTransf;
                #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
                set controlele [expr $controlele + 1]
            }
        }
    }
}

```

```

        set nele [expr $nele+1]
        set nnode [expr $nnode+$dirx]
        set controlnode [expr $controlnode+1]
    } else {
        set controlnode 1
        set nnode [expr $nnode+1-($dirx*($diry-1))]

        if {$controlele < [expr $diry]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        } else {
            if {$controlele > [expr $diry*($dirx-1)-$dirx +1]} {
                #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
                element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
                #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
                set controlele [expr $controlele + 1]
            } else {
                element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxSecfiber
$IDSlabxTransf;
                #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
                set controlele [expr $controlele + 1]
            }
        }
        set nele [expr $nele+1]
        set nnode [expr $nnode+$dirx]
        set controlnode [expr $controlnode+1]
    }
}

```

```

puts $nele
set IDColTransf 3
geomTransf Linear $IDColTransf 0 0 1;

```

```

# CONDIÇÕES FRONTEIRA
fix $pnpp 1 1 1 0 0 0
fix [expr $pnpp+$dirx-1] 1 1 1 0 0 0
fix $unpp 1 1 1 0 0 0
fix [expr $unpp-$dirx+1] 1 1 1 0 0 0

```

```

#          CARREGAMENTO ESTÁTICO

```

```

set GammaConcrete [expr 500*$pcf];
set DeadLoad [expr $thickness*$GammaConcrete];    #por unidade de área
set LiveLoad [expr 0/($ly*$lx)];                  #por unidade de área 45 6 para 5 por 5
puts [expr $ly*$lx*($DeadLoad+$LiveLoad)]
set anodei [expr $BSlabx*$BSlaby];                  #área de influencia de um nó inteior
set anodeb [expr $anodei/2];                        #área de influencia de um nó do bordo
set anodec [expr $anodeb/2];                        #área de influencia de um nó do canto

```

```

set wnodec [expr $anodec*($DeadLoad+$LiveLoad)]; #carga pontual num nó do canto
set wnodeb [expr $anodeb*($DeadLoad+$LiveLoad)]; #carga pontual num nó do bordo
set wnodei [expr $anodei*($DeadLoad+$LiveLoad)]; #carga pontual num nó interior

```

```

pattern Plain 1 Linear {
#aplicação das cargas nos cantos
load $pnpp 0 -$wnodec 0 0 0 0
load [expr $pnpp+$dirx-1] 0 -$wnodec 0 0 0 0
load [expr $unpp-$dirx+1] 0 -$wnodec 0 0 0 0
load $unpp 0 -$wnodec 0 0 0 0

#aplicação das cargas nos bordos (lados este-oeste)
set controlnode 0
set nnode [expr $pnpp+1]
set total [expr 4*$wnodec]
for {set k 0} {$k < [expr ($dirx-2)*2]} {incr k 1} {
    if {$controlnode < [expr $dirx-2]} {
        load $nnode 0 -$wnodeb 0 0 0 0
        set total [expr $total+$wnodeb]
        set controlnode [expr $controlnode + 1]
        set nnode [expr $nnode + 1]
    } else {
        set nnode [expr $unpp - $dirx + 2]
        set controlnode 0
        load $nnode 0 -$wnodeb 0 0 0 0
        set total [expr $total+$wnodeb]
        set nnode [expr $nnode + 1]
    }
}
}

```

```

#aplicação das cargas nos bordos (lados norte-sul)
set controlnode 0
set nnode [expr $pnpp+$dirx]
for {set k 0} {$k < [expr ($diry-2)*2]} {incr k 1} {
    if {$controlnode < 2} {
        load $nnode 0 -$wnodeb 0 0 0 0
        set total [expr $total+$wnodeb]
        set controlnode [expr $controlnode+1]
        set nnode [expr $nnode+$dirx-1]
    } else {
        set nnode [expr $nnode-$dirx+2]
        load $nnode 0 -$wnodeb 0 0 0 0
        set total [expr $total+$wnodeb]
        set controlnode 1
        set nnode [expr $nnode+$dirx-1]
    }
}

```

```

#aplicação das cargas nos nós interiores
set controlnode 0
set nnode [expr $pnpp+$dirx+1]
set var 0
for {set k 0} {$k < [expr ($dirx-2)*($diry-2)]} {incr k 1} {
    if {$controlnode < [expr $dirx-2]} {
        load $nnode 0 -$wnodei 0 0 0 0
        set total [expr $total+$wnodei]
        set controlnode [expr $controlnode + 1]
        set nnode [expr $nnode+1]
    } else {
        set nnode [expr $nnode+2]
    }
}

```

```

        load $nnode 0 -$wnodei 0 0 0 0
        set total [expr $total+$wnodei]
        set nnode [expr $nnode+1]
        set controlnode 1
    }} }

#           DEFINIÇÃO DOS RECORDERS E GRÁFICOS
set no [expr $dirx*$diry/2+5]
recorder Node -file $dataDir/40.out -time -node $no -dof 1 2 3 disp;
set elerec 1
#set elerec [expr $dirx]

for {set k 0} {$k < [expr ($diry-1)*($dirx-1)]} {incr k 1} {
    recorder Element -file $dataDir/$elerec.out -ele $elerec section $SlabySec fiber -$coverYsx 0 $IDSteel
    stressStrain
    set elerec [expr $elerec +1]
}

recorder display resultados 625 10 600 600 -wipe
prp -1 40 10
vup 0 1 0
display 1 4 100

#           TIPOS DE ANÁLISE           #
set Tol 1.0e-5;                        # convergence tolerance for test
constraints Plain;                      # how it handles boundary conditions
numberer Plain;                        # renumber dof's to minimize band-width (optimization), if you want to
system UmfPack;                        # how to store and solve the system of equations in the analysis
test NormDispIncr $Tol 6;              # determine if convergence has been achieved at the end of an
iteration step
algorithm Newton;                      # use Newton's solution algorithm: updates tangent stiffness at
every iteration
set NstepGravity 30;                   # apply gravity in 10 steps
set DGravity [expr 1./$NstepGravity];  # first load increment;
integrator LoadControl $DGravity;      # determine the next time step for an analysis
analysis Static;                      # define type of analysis static or transient
analyze $NstepGravity;                # apply gravity
# ----- maintain constant gravity loads and reset time to zero
loadConst -time 0.0

```

ANEXO B

Código para a análise não linear de elementos laminares verticais (paredes resistentes)

```

wipe;                                # limpa a memória de todas as análises efectuadas anteriormente
model BasicBuilder -ndm 3 -ndf 6;    # define o número de dimensões e graus de liberdade
set dataDir Data;
file mkdir $dataDir;

source LibUnits.tcl;                # define o sistema de unidades

set dirx 25                          #define o número de divisões na direcção x
set diry 25                          #define o número de divisões na direcção y

set alt1 [expr 10*$ft];              # altura da laje do primeiro piso (cota)
set lx [expr 15*$ft];                # distância na direcção x (consultar convenção de eixos)
set ly [expr 15*$ft];                # distância na direcção y (consultar convenção de eixos)

set numBarsSlabxI 10;                # numero de barras na face inferior de aço na direcção x
set barAreaSlabxI [expr 2.5*$in2/($dirx)]; # area das barras na face inferior colocadas na direcção x
set numBarsSlabxS 10;                # numero de barras de aço na face superior na direcção x
set barAreaSlabxS [expr 1*$in2/($dirx)]; # area das barras na face superior colocadas na direcção x
set numBarsSlabyI 10;                # numero de barras na face inferior de aço na direcção y
set barAreaSlabyI [expr 2.5*$in2/($diry)]; # area das barras na face inferior colocadas na direcção y
set numBarsSlabyS 10;                # numero de barras na face superior de aço na direcção y
set barAreaSlabyS [expr 1*$in2/($diry)]; # area das barras na face superior colocadas na direcção y

set thickness [expr 7*$in];          # espessura da laje

set n 5;                             # número do primeiro nó da laje do primeiro piso (variavel)
set pnpp $n;                         # número do primeiro nó da laje do primeiro piso (nao varia)

# DEFINIÇÃO DOS MATERIAIS

set Ec [expr 57*$ksi*sqrt(-$fc/$psi)];
source LibMaterialsRC.tcl;        # define a biblioteca dos materiais

#Criação dos nós na laje
for {set i 0} {$i < [expr $diry]} {incr i 1} {
    for {set j 0} {$j < [expr $dirx]} {incr j 1} {
        node $n 0 [expr $j*$ly/($dirx-1)+$alt] [expr $i*$lx/($diry-1)]
        set n [expr $n+1]
    }
}
set unpp [expr $n-1]

#Definição de materiais
set fc [expr -5.*$ksi];
set Ec [expr 57*$ksi*sqrt(-$fc/$psi)];

#Apoios elásticos
set n 1
set le [expr 3.2808398950131233595800524934383*$ft]
set altVe [expr $alt + $ly]
for {set i 0} {$i < $diry} {incr i 1} {
    node $n $le $altVe [expr $i*$lx/($diry-1)]
    puts $n
    set n [expr $n+1]
}

fix 1 1 1 1 1 1 1
fix 2 1 1 1 1 1 1

```



```
fix 3 1 1 1 1 1 1
fix 4 1 1 1 1 1 1
fix 5 1 1 1 1 1 1
fix 6 1 1 1 1 1 1
fix 7 1 1 1 1 1 1
```

```
set BVe [expr 10*$in]
set HVe [expr 10/7*$in]
set AVe 14.85;
set IzVe 33294.271779;
set IyVe 35294.271779;
set GVe [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JVe $Ubig;
set EVe [expr 435/7];
```

```
source LibMaterialsRC.tcl; # define library of Reinforced-concrete Materials
```

```
#Parâmetros geométricos da laje
```

```
#vigas interiores segundo x
set HSlabx $thickness
set BSlabx [expr $ly/($dirx-1)]
puts $BSlabx
set ASlabx [expr $HSlabx*$BSlabx]; # cross-sectional area
set IzSlabx [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlabx*pow($HSlabx,3)]; # Beam moment of inertia
set IySlabx [expr 1./12*$HSlabx*pow($BSlabx,3)];
set GSlabx [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlabx [expr 2*$IzSlabx]
```

```
#vigas interiores segundo y
set HSlaby $thickness
set BSlaby [expr $lx/($diry-1)]
puts $BSlaby
set ASlaby [expr $HSlaby*$BSlaby]; # cross-sectional area
set IzSlaby [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlaby*pow($HSlaby,3)]; # Beam moment of inertia
set IySlaby [expr 1./12*$HSlaby*pow($BSlaby,3)];
set GSlaby [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlaby [expr 2*$IzSlaby]
```

```
#Parâmetros geométricos das vigas dos bordos
```

```
#segundo x
set BSlabxb [expr ($ly/($dirx-1))/2]
set ASlabxb [expr $HSlabx*$BSlabxb]; # cross-sectional area
set IzSlabxb [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlabxb*pow($HSlabx,3)]; # Beam moment of inertia
set IySlabxb [expr 1./12*$HSlabx*pow($BSlabxb,3)];
set GSlabxb [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlabxb [expr 2*$IzSlabxb];
```

```
#segundo y
set BSlabyb [expr ($lx/($diry-1))/2]
set ASlabyb [expr $HSlaby*$BSlabyb]; # cross-sectional area
set IzSlabyb [expr 1./(12*(1-0.2*0.2))*$BSlabyb*pow($HSlaby,3)]; # Beam moment of inertia
set IySlabyb [expr 1./12*$HSlaby*pow($BSlabyb,3)];
set GSlabyb [expr $Ec/(2*(1+0.2))]
set JSlabyb [expr 2*$IzSlabyb];
```

#Parâmetros geometricos das colunas

set LCol [expr 30*\$in]; #secção quadrada para colunas

#DEFINIÇÃO DE SECÇÕES

```
set ColSec 1;
set SlabxSec 2;
set SlabySec 3;
set SlabxbSec 4;
set SlabybSec 5;
set ColSecfiber 5;
set SlabxSecfiber 6;
set SlabySecfiber 7;
set SlabxbSecfiber 8;
set SlabybSecfiber 9;
set SecTorsionSlabx 10;
set SecTorsionSlaby 11;
set SecTorsionSlabxb 12;
set SecTorsionSlabyb 13;
```

#Definação da secção dos elementos da laje na direcção x

set coverSlabx [expr 2.*\$in]; # Column cover to reinforcing steel NA.

```
set coverYsx [expr $HSlabx/2.0]; set coverZsx [expr $BSlabx/2.0]; set coreYsx [expr $coverYsx-
$coverSlabx]
set coreZsx [expr $coverZsx]
set nfY 10; # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5; # número divisões da secção na direcção z
section fiberSec $SlabxSec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsx $coverZsx -$coverYsx -$coverZsx $coverYsx -$coverZsx
$coverYsx $coverZsx;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabx -$coreYsx $coreZsx -$coreYsx -$coreZsx;
};
```

#Definação da secção dos elementos da laje na direcção y

```
set coverSlaby [expr 2.*$in];
set coverYsy [expr $HSlaby/2.0];
set coverZsy [expr $BSlaby/2.0];
set coreYsy [expr $coverYsy-$coverSlaby]
set coreZsy [expr $coverZsy]
set nfY 10; # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5; # número divisões da secção na direcção z

section fiberSec $SlabySec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsy $coverZsy -$coverYsy -$coverZsy $coverYsy -$coverZsy
$coverYsy $coverZsy;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlaby -$coreYsy $coreZsy -$coreYsy -$coreZsy;
};
```

#Definação da secção dos elementos da laje (bordos) na direcção x

```
set coverSlabx [expr 2.*$in];
set coverYsx [expr $HSlabx/2.0];
set coverZsx [expr $BSlabxb/2.0];
set coreYsx [expr $coverYsx-$coverSlabx]
set coreZsx [expr $coverZsx]
set nfY 10; # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5; # número divisões da secção na direcção z
```

```

section fiberSec $SlabxbSec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsx $coverZsx -$coverYsx -$coverZsx $coverYsx -$coverZsx
$coverYsx $coverZsx;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabxl -$scoreYsx $scoreZsx -$scoreYsx -$scoreZsx;
};

#Definação da secção dos elementos da laje (bordos) na direcção y
set coverSlaby [expr 2.*$in];
set coverYsy [expr $HSlaby/2.0];
set coverZsy [expr $BSlabyb/2.0];
set coreYsy [expr $coverYsy-$coverSlaby]
set coreZsy [expr $coverZsy]
set nfY 10;          # número divisões da secção na direcção y
set nfZ 5;           # número divisões da secção na direcção z

section fiberSec $SlabybSec {;
patch quadr $IDconcCover $nfZ $nfY -$coverYsy $coverZsy -$coverYsy -$coverZsy $coverYsy -$coverZsy
$coverYsy $coverZsy;
layer straight $IDSteel 1 $barAreaSlabyb -$scoreYsy $scoreZsy -$scoreYsy -$scoreZsy;
};

# atribuir rigidez à torção
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlabx $JSlabx
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlaby $JSlaby
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlabxb $JSlabxb
uniaxialMaterial Elastic $SecTorsionSlabyb $JSlabyb

section Aggregator $SlabxSecfiber $SecTorsionSlabx T -section $SlabxSec
section Aggregator $SlabySecfiber $SecTorsionSlaby T -section $SlabySec
section Aggregator $SlabxbSecfiber $SecTorsionSlabxb T -section $SlabxbSec
section Aggregator $SlabybSecfiber $SecTorsionSlabyb T -section $SlabybSec

set IDSlabxTransf 1
set IDSlabyTransf 2

geomTransf Linear $IDSlabxTransf 1 0 0;
geomTransf Linear $IDSlabyTransf 0 0 1;
geomTransf Linear $IDVe 0 -1 0;
set np 5

#Criação dos elementos
#ELEMENTOS NA DIRECÇÃO Y

set controlnode 1
set controlele 1
set nele 1
set nnode $pnpp
for {set k 0} {$k < [expr $diry*($dirx-1)]} {incr k 1} {
    if {$controlnode < $dirx} {
        if {$controlele < [expr $dirx]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $BeamSecfiber
            $IDSlabyTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $np $SlabybSecfiber
            $IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +1] $ASlabyb $Ec $GSlabyb
            $JSlabyb $IySlabyb $IzSlabyb $IDSlabyTransf;

```

```

        set controlele [expr $controlele + 1]
    } else {
        if {$controlele > [expr $dirx*($dirx-1)-$dirx + 1]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $BeamSecfiber
$IDSlabyTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $SlabybSecfiber
$IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $ASlabyb $Ec $GSlabyb
$JSlabyb $IySlabyb $IzSlabyb $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        } else {
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $SlabySecfiber
$IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $ASlaby $Ec $GSlaby
$JSlaby $IySlaby $IzSlaby $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        }
    }

    set nele [expr $nele+1]
    set nnode [expr $nnode+1]
    set controlnode [expr $controlnode+1]
} else {
    set controlnode 1
    set nnode [expr $nnode+1]
    if {$controlele < [expr $dirx]} {
        #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $BeamSecfiber
$IDSlabyTransf;
        element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $SlabybSecfiber
$IDSlabyTransf;
        #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $ASlabyb $Ec $GSlabyb
$JSlabyb $IySlabyb $IzSlabyb $IDSlabyTransf;
        set controlele [expr $controlele + 1]
    } else {
        if {$controlele > [expr $dirx*($dirx-1)-$dirx + 1]} {
            #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $BeamSecfiber
$IDSlabyTransf;
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $SlabybSecfiber
$IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $ASlabyb $Ec $GSlabyb
$JSlabyb $IySlabyb $IzSlabyb $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        } else {
            element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $np $SlabySecfiber
$IDSlabyTransf;
            #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode + 1] $ASlaby $Ec $GSlaby
$JSlaby $IySlaby $IzSlaby $IDSlabyTransf;
            set controlele [expr $controlele + 1]
        }
    }
    set nele [expr $nele+1]
    set nnode [expr $nnode+1]
    set controlnode [expr $controlnode+1]
}
}

#ELEMENTOS NA DIRECÇÃO X
set controlnode 1
set controlele 1
set nnode $pnpp

```

```
for {set k 0} {$k < [expr $dirx*($diry-1)]} {incr k 1} {
  if {$controlnode<$diry} {
    if {$controlele < [expr $diry]} {
      #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
      element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
      #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabxb $Ec $GSlabxb
$JSlabxb $IySlabxb $IzSlabxb $IDSlabxTransf;
      set controlele [expr $controlele + 1]
    } else {
      if {$controlele > [expr $dirx*($dirx-1)-$dirx +1]} {
        #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
        element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
        #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabxb $Ec $GSlabxb
$JSlabxb $IySlabxb $IzSlabxb $IDSlabxTransf;
        set controlele [expr $controlele + 1]
      } else {
        element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxSecfiber
$IDSlabxTransf;
        #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
        set controlele [expr $controlele + 1]
      }
    }
    set nele [expr $nele+1]
    set nnode [expr $nnode+$dirx]
    set controlnode [expr $controlnode+1]
  } else {
    set controlnode 1
    set nnode [expr $nnode+1-($dirx*($diry-1))]
    if {$controlele < [expr $diry]} {
      #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
      element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
      #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabxb $Ec $GSlabxb
$JSlabxb $IySlabxb $IzSlabxb $IDSlabxTransf;
      set controlele [expr $controlele + 1]
    } else {
      if {$controlele > [expr $dirx*($dirx-1)-$dirx +1]} {
        #element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $BeamSecfiber
$IDSlabxTransf;
        element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxbSecfiber
$IDSlabxTransf;
        #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabxb $Ec $GSlabxb
$JSlabxb $IySlabxb $IzSlabxb $IDSlabxTransf;
        set controlele [expr $controlele + 1]
      } else {
        element nonlinearBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode+$dirx] $np $SlabxSecfiber
$IDSlabxTransf;
        #element elasticBeamColumn $nele $nnode [expr $nnode +$dirx] $ASlabx $Ec $GSlabx
$JSlabx $IySlabx $IzSlabx $IDSlabxTransf;
        set controlele [expr $controlele + 1]
      }
    }
  }
}
```

```

set nele [expr $nele+1]
set nnode [expr $nnode+$dirx]
set controlnode [expr $controlnode+1]
}}

#elementos das vigas elasticas
element elasticBeamColumn $nele 1 [expr $pnpp +$dirx -1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;
element elasticBeamColumn [expr $nele+1] 2 [expr $pnpp +2*$dirx-1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;
element elasticBeamColumn [expr $nele+2] 3 [expr $pnpp +3*$dirx-1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;
element elasticBeamColumn [expr $nele+3] 4 [expr $pnpp +4*$dirx-1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;
element elasticBeamColumn [expr $nele+4] 5 [expr $pnpp +5*$dirx-1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;
element elasticBeamColumn [expr $nele+5] 6 [expr $pnpp +6*$dirx-1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;
element elasticBeamColumn [expr $nele+6] 7 [expr $pnpp +7*$dirx-1] $AVe $EVe $GVe $JVe $IyVe $IzVe $IDVe;

# CARREGAMENTO ESTÁTICO

set nnode [expr $pnpp +$dirx -1]

pattern Plain 1 Linear {
    load $nnode          0.4 -8.6 0 0 0 241.6
    load [expr $nnode + 1*$dirx] 0.8 -14.6 0 0 0 223.9
    load [expr $nnode + 2*$dirx] 0.8 -14.1 0 0 0 193.0
    load [expr $nnode + 3*$dirx] 0.8 -14.1 0 0 0 136.3
    load [expr $nnode + 4*$dirx] 0.8 -14.1 0 0 0 193.0
    load [expr $nnode + 5*$dirx] 0.8 -14.6 0 0 0 223.9
    load [expr $nnode + 6*$dirx] 0.4 -8.6 0 0 0 241.6
}
puts $Ec
set nnode $pnpp
for {set k 0} {$k < $diry} {incr k 1} {
    fix $nnode 1 1 1 1 1 1
    set nnode [expr $nnode+$dirx]
}
set elerec [expr ($diry-1)/2*($dirx-1)+1]
recorder Element -file $dataDir/acoforte.out -ele 31 section $SlabySec fiber -$scoreYsy 0 $IDSteel stressStrain;
recorder Element -file $dataDir/acofraco.out -ele 31 section $SlabySec fiber $scoreYsy 0 $IDSteel stressStrain;
recorder Element -file $dataDir/betao.out -ele 31 section $SlabySec fiber [expr $thickness/2] 0 stressStrain;
recorder Element -file $dataDir/mo.out -time -ele 31 localForce
recorder Element -file $dataDir/curva.out -time -ele 31 section $SlabySec deformation
#
set no [expr $pnpp + 4*$dirx -1];
set ne [expr $pnpp + 4*$dirx];

recorder Node -file $dataDir/brahparede.out -time -node $no -dof 1 disp;          # support reaction
recorder display shell2 625 10 600 600 -wipe
prp -100 20 1000
vup 0 1 0
display 1 4 100

```

```
set Tol 1.0e-5;           # convergence tolerance for test
constraints Plain;        # how it handles boundary conditions
numberer Plain;          # renumber dof's to minimize band-width (optimization), if you want to
system UmfPack;          # how to store and solve the system of equations in the analysis
test NormDisplIncr $Tol 6; # determine if convergence has been achieved at the end of an iteration
step
algorithm Newton;        # use Newton's solution algorithm: updates tangent stiffness at every
iteration
set NstepGravity 20;      # apply gravity in 10 steps
set DGravity [expr 1./$NstepGravity]; # first load increment;
integrator LoadControl $DGravity; # determine the next time step for an analysis
analysis Static;          # define type of analysis static or transient
analyze $NstepGravity;    # apply gravity
# ----- maintain constant gravity loads and reset time to zero
loadConst -time 0.0
```

#Define força de referência force

```
set nnode [expr $pnpp + $dirx -1]
```

```
#
```

```
pattern Plain 2 Linear {
```

```
    load $nnode 0.2248 0 0 0 0 0
    load [expr $nnode + 1*$dirx] 0.2248 0 0 0 0 0
    load [expr $nnode + 2*$dirx] 0.2248 0 0 0 0 0
    load [expr $nnode + 3*$dirx] 0.2248 0 0 0 0 0
    load [expr $nnode + 4*$dirx] 0.2248 0 0 0 0 0
    load [expr $nnode + 5*$dirx] 0.2248 0 0 0 0 0
    load [expr $nnode + 6*$dirx] 0.2248 0 0 0 0 0
```

```
}
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
```

```
analyze 1
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr 3.5*0.03937]
```

```
analyze 2
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
```

```
analyze 2
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr 3.5*0.03937]
```

```
analyze 2
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
```

```
analyze 2
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr 3.5*0.03937]
```

```
analyze 2
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
```

```
analyze 1
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -2.917*0.03937]
```

```
analyze 3
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr +2.917*0.03937]
```

```
analyze 6
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -2.917*0.03937]
```

```
analyze 6
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr +2.917*0.03937]
```

```
analyze 6
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -2.917*0.03937]
```

```
analyze 6
```

```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr +2.917*0.03937]
```

analyze 6
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -2.917*0.03937]
analyze 3

integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 5
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 10
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 10
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 10
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 10
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 10
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 5

integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 10
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 20
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 20
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 20
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 20
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 20
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 10

integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 20
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 40
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 40
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 40
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 40
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +3.5*0.03937]
analyze 40
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -3.5*0.03937]
analyze 20

integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -7*0.03937]
analyze 15
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +7*0.03937]
analyze 30
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr -7*0.03937]
analyze 30
integrator DisplacementControl [expr \$pnpp + 4*\$dirx -1] 1 [expr +7*0.03937]
analyze 30


```
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -7*0.03937]
analyze 30
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr +7*0.03937]
analyze 30
integrator DisplacementControl [expr $pnpp + 4*$dirx -1] 1 [expr -7*0.03937]
analyze 15
```